Analyse de données

Contrôle continu, novembre 2019

Temps disponible : 50 minutes

Les réponses doivent être justifiées par l'indication (du début) des calculs.

Nom : Correction	Prénom : Correction

Exercice 1. La probabilité de survie sur l'année d'un ourson brun en captivité est d'environs 38%. Dans un groupement de zoos d'Amérique du Nord vivent 22 oursons.

1. Quel est le nombre attendu d'oursons de ces zoos qui survivent dans l'année ?

Soit X la variable aléatoire qui représente le nombre d'oursons qui survivent dans ces zoos, dans l'année. C'est une loi binomiale de paramètres $p = 0,38$ et $n = 22$. On calcule l'espérance $E(X) = np = 8,36$. On attend donc $8,36$ oursons qui survivent.

2. Quelle est la probabilité que, dans l'année, au plus 10 ourson survivent ?

On utilise la loi binomale évoquée à la question précédente. On note $f(x) = P(X = x)$ la fonction de densité et $F(x) = P(X \leqslant x)$ la fonction de répartition de cette loi. La formule pour calculer $f(x)$ est :

$$f(x) = \binom{22}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \binom{22}{x} \times (0,38)^x \times (0,62)^{22-x}.$$

On a donc :

$$P(X \leqslant 10) = F(10) = f(0) + f(1) + \cdots + f(10) = 0,827.$$

3. Avec quelle probabilité le nombre d'oursons qui survivent dans l'année est entre 5 et 15, bornes comprises ?

On utilise de nouveau la fonction de répartition F. La probabilité cherchée est :

$$P(5 \leqslant X \leqslant 15) = P(X \leqslant 15) - P(X \leqslant 4) = F(10) - F(4) = 0,9587.$$

4. Quelle est la probabilité que, dans l'année, plus de 7 oursons survivent ?

On utilise encore F. La probabilité cherchée est :

$$P(X > 7) = 1 - P(X \leqslant 7) = 1 - F(7) = 0,641.$$

Exercice 2. D'après une étude de la Société de la faune et des parcs du Québec, le poids des ours bruns adultes du Québec suit une distribution normale de moyenne $104,8$Kg et d'écart-type $19,4$Kg. On prélève un ours brun du Québec. Quelle est la probabilité qu'il ait :

1. un poids d'au plus 110Kg ?

Soit X la loi de distribution du poids des ours bruns adultes du Québec exprimée en kilos. On se ramène à la loi normale centrée réduite Z par :

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-104,8}{19,4}.$$

Ainsi on trouve la probabilité cherchée :

$$P(X \leqslant 110) = P\left(Z \leqslant \frac{110-104,8}{19,4}\right) = P(Z \leqslant 0,268) = 0,6057.$$

2. un poids supérieur à 90kg ?

On utilise la même loi de probabilité, plus la formule :

$$P(Z \geqslant z) = 1 - P(Z \leqslant z) = 1 - (1 - P(Z \leqslant -z)) = P(Z \leqslant -z).$$

Ainsi la probabilité cherchée est :

$$P(X \geqslant 90) = 1 - P\left(Z \leqslant \frac{90-104,8}{19,4}\right) = 1 - P(Z \leqslant -0,762) =$$
$$= 1 - (1 - P(Z \leqslant -0,762)) = P(Z \leqslant 0,762) = 0,7772.$$

3. un poids compris entre 85Kg et 120Kg ?

La probabilité cherchée est :

$$P(85 \leqslant X \leqslant 120) = P\left(Z \leqslant \frac{120-104,8}{19,4}\right) - P\left(Z \leqslant \frac{85-104,8}{19,4}\right) =$$
$$= P(Z \leqslant 0,783) - P(Z \leqslant -1,02) = P(Z \leqslant 0,783) - (1 - P(Z \leqslant 1,02)) =$$
$$= 0,7833 - 1 + 0,8463 = 0,6296.$$

4. On prélève 4 ours bruns du Québec. Dire quelle est la probabilité que deux de ces quatre ours aient un poids compris entre 85Kg et 120Kg.

On a, d'après la question précédente, que la probabilité p de prélever 1 ours brun de poids compris entre 85Kg et 120Kg est $p = 0,6296$. On a $1 - p = 0,3704$. Le nombre d'ours bruns ayant ce poids est exprimé par la loi binomiale X de paramètres $p = 0,6296$ et $n = 4$, car les issues possibles sont deux (l'ours a un tel poids ou pas) et les prélèvements sont indépendants les uns des autres. Donc on trouve :

$$P(X = 2) = \binom{4}{2} p^2 (1-p)^2 = \binom{4}{2} \times 0,6296^2 \times 0,3704^2 = 0,3263.$$

Dire, en détaillant l'utilisation de la loi normale centrée réduite :

5. dans quel intervalle de poids se situent les 95% des ours moyens ;

On cherche un intervalle bilatéral centré en la moyenne μ. Pour la marge d'erreur $\alpha = 5\% = 0,05$, on utilise la valeur connue $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$. On sait que la probabilité $1-\alpha = 0,95$ correspond à l'intervalle $[-z_{\frac{\alpha}{2}}, z_{\frac{\alpha}{2}}]$ dans le sens que $P(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leqslant Z \leqslant z_{\frac{\alpha}{2}}) = 0,95$.
Par la formule $Z = (X-\mu)/\sigma$ on obtient $X = \sigma Z + \mu$. L'intervalle en question est :

$$[\mu - \sigma z_{\frac{\alpha}{2}}, \mu + \sigma z_{\frac{\alpha}{2}}] = [104,8 - 19,4 \times 1,96\,;\, 104,8 + 19,4 \times 1,96]\text{Kg} = [66,776; 142,824]\text{Kg}.$$

6. à quel poids les 14% des ours les plus lourds sont supérieurs.

On cherche un intervalle unilatéral de la forme $[z_\alpha, +\infty[$. Ici $\alpha = 0,14$ donc $1 - \alpha = 0,86$. D'après la table, on trouve $z_\alpha = 1,08$, ainsi $P(Z \leqslant z_\alpha) = 0,86$. On a $X = \sigma Z + \mu$, donc l'intervalle en question prend la forme :

$$[\mu + \sigma z_\alpha, +\infty[= [104,8 + 19,4 \times 1,08\,;\, +\infty[\text{Kg} = [125,752; +\infty[\text{Kg}$$

Les 14% des ours les plus lourds ont donc un poids supérieur à $125,752$Kg.