Analyse – Math31

Temps disponible : 2 heures

Documents et calculatrices interdits. Toute réponse doit être justifiée.

Exercice 1 (Question de cours). Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite numérique positive qui décroit vers 0. Considérons la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n u_n$ et, pour tout $n \geq 0$, la somme partielle $s_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$.

a) Rappeler la définition de suites adjacentes.

b) Soit (x_n) une suite numérique réelle et $a \in \mathbb{R}$. Justifier que, si (x_n) converge vers a, on a :

(1) $$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = a = \lim_{n\to\infty} x_{2n+1}.$$

Montrer ensuite la réciproque, à savoir que si on a (1), alors (x_n) converge vers a.

c) Montrer que la suite $(w_n) = (s_{2n+1})$ est croissante. Qu'arrive-t-il à $(v_n) = (s_{2n})$?

d) Montrer que (w_n) et (v_n) sont adjacentes.

e) Conclure que $\sum_{n\geq 0}(-1)^n u_n$ converge.

f) Utiliser ce qui précède pour fournir des exemples de séries semiconvergentes.

Corrigé 1. La démonstration est développée dans les notes de cours. Pour les exemples, on peut penser à $\sum(-1)^n/n$.

Exercice 2. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes, en fonction de $a, b \in \mathbb{N}^*$:

a) $\sum_{n\geq 1}\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - 1\right)x^n$; b) $\sum_{n\geq 1}\dfrac{(1-i)^n}{n}x^n$; puis $\sum_{n\geq 1}\dfrac{(1-i)^n}{n}x^{an}$; c) $\sum_{n\geq 1}\frac{(an)!}{(n!)^b}x^n$.

Corrigé 2. La première série ne dépend pas de a, b, la deuxième ne dépend pas de b. Notons $\sum a_n x^n$ la série et R son rayon de convergence.

a) On sait que :
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$
En posant $x = 1/\sqrt{n}$, on en obtient
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - 1\right)n = -\frac{1}{2}.$$
Ainsi, il existe n_0 tel que a_n est de signe constant négatif pour tout $n \geq 0$ et le terme général de la série $\sum a_n$ est équivalent à $-1/(2n)$. Ainsi, cette série diverge. Le rayon R vaut donc au plus 1. Par ailleurs :
$$|a_n x^n| \leq \left|\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - 1\right||x|^n \leq 2|x|^n,$$
qui est borné si $|x| < 1$, donc $R \geq 1$. Conclusion, $R = 1$.

b) On commence par écrire :
$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{n|1-i|^{n+1}}{(n+1)|1-i|^{n1}} = |1-i| = \sqrt{2},$$
donc $R = 1/\sqrt{2}$. Ensuite on montre que, si $\sum u_n x^n$ a rayon de convergence R, alors le rayon de convergence R_a de $\sum u_n x^{an}$ vaut $R_a = R^{1/a}$. En effet, si $|x| < R^{1/a}$, on a r tel que $|x|^a < r < R$ donc $|u_n x^{an}| \leq |u_n| r^n$, ce qui est une suite bornée donc $R_a \geq R^{1/a}$. De même si $|x| > R^{1/a}$ on a r tel que $|x|^a > r > R$ donc $|u_n x^{an}| \geq |u_n| r^n$ ce qui n'est pas une suite bornée. Ainsi $R_a = R^{1/a}$. On en déduit, pour la suite en série entière $\sum_{n\geq 1}\dfrac{(1-i)^n}{n}x^{an}$, que $R = 2^{\frac{-1}{2a}}$.

c) On utilise d'Alembert :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(a(n+1))!((n)!)^b}{(an)!((n+1)!)^b}=\lim_{n\to\infty}\frac{(an+a)\cdots(an+1)(an)!n^b(n-1)^b\cdots 2^b}{(an)!(n+1)^b n^b(n-1)^b\cdots 2^b}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(an+a)\cdots(an+1)}{(n+1)^b}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^a n^a}{n^b}.$$

Cette limite vaut 0 si $b>a$, $+\infty$ si $a>b$, a^b si $a=b$. Ainsi, le rayon R cherché vaut $R=+\infty$ si $b>a$, $R=0$ si $a>b$, $R=a^{-a}$ si $a=b$.

Exercice 3. Le but de cet exercice est de calculer la limite ℓ, pour n qui tend vers ∞, de :

$$u_n=\left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

1. Calculer $\ln((2n)!)$ puis montrer que :
$$\ln(u_n)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right).$$
2. Calculer $\lim_{n\to\infty}\ln(u_n)$ à l'aide d'une somme de Riemann.
3. Conclure que $\ell=4/e$.

Corrigé 3. Prenons comme valeur initiale de la suite $n=1$.

1. Bien sûr on a, pour tout nombre naturel m, $\ln(m!)=\sum_{k=1}^{m}\ln(k)$. Ainsi $\ln((2n)!)=\sum_{k=1}^{2n}\ln(k)$. Donc :
$$\ln(u_n)=\frac{1}{n}\ln\left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right)=\frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{2n}\ln(k)-\sum_{k=0}^{n}\ln(k)-n\ln(n)\right)=\frac{1}{n}\left(\sum_{k=n+1}^{2n}\ln(k)-n\ln(n)\right)$$
$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{k=n+1}^{2n}\ln(k/n)\right)=\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\ln((k+n)/n)\right)=\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\ln(1+(k/n))\right).$$
2. On utilise la fonction $f(x)=\ln(x)$, continue donc intégrable sur $[1,2]$, que l'on intègre sur ce segment grâce à une somme de Riemann sur la subdivision régulière en n parties ($x_0<\cdots<x_n$) de $[1,2]$ définie par $x_k=1+k/n$. On obtient :
$$\int_1^2\ln(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(x_k)(x_k-x_{k-1})=\lim_{n\to\infty}u_n.$$
Il ne reste plus qu'à calculer l'intégrale. On a une primitive de $\ln(x)$ sur $[1,2]$, à savoir $x(\ln(x)-1)$. Donc :
$$\int_1^2\ln(x)dx=(\ln(x)-1)\Big|_{x=1}^{x=2}=2\ln(2)-2+1=2\ln(2)-1.$$
3. On a immédiatement $\ell=\exp(2\ln(2)-1)=4/e$.

Exercice 4. Considérons la série entière $\sum_{n\geq 0}\frac{u_n}{n!}z^n$ où la suite complexe (u_n) est définie par les relations

$$u_0=1,\qquad u_{n+1}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u_k u_{n-k},\quad\text{pour tout } n\geq 1.$$

1. Montrer que, quelque soit $n\in\mathbb{N}$, on a $|u_n|\leq n!/2^n$. En déduire que le rayon R de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0}\frac{u_n}{n!}z^n$ est au moins 2.
2. Soit, pour tout $z\in\mathbb{C}$ de module inférieur à R, $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_n}{n!}z^n$. Montrer $2f'(z)=f(z)^2$.
3. Déduire de ce qui précède que $f(z)=2/(2-z)$ lorsque $|z|<R$ puis établir la valeur de R.

Corrigé 4. Notons $a_n=u_n/n!$.

1. On raisonne par récurrence. Pour $n = 0$ l'inégalité est vérifiée, car $u_0 = 1 \leq 0!/2^0 = 1$. Supposons l'inégalité valide pour tout $k \leq n$ et regardons $|u_{n+1}|$. On a :
$$\begin{aligned}|u_{n+1}| &= \frac{1}{2}\left|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u_k u_{n-k}\right| \leq \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}|u_k||u_{n-k}| \\ &\leq \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{k!}{2^k}\frac{(n-k)!}{2^{n-k}} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{k!(n-k)!}{2^n} = \frac{(n+1)!}{2^{n+1}}.\end{aligned}$$
L'inégalité est ainsi prouvé pour tout n. On en déduit, étant donné $z \in \mathbb{C}$:
$$|a_n z^n| \leq \frac{u_n}{n!}|z|^n \leq \frac{|z|^n}{2^n},$$
ce qui est une suite bornée si $|z| < 2$. Ainsi $R \geq 2$.
2. Si $|z| < R$, $f'(z)$ est bien défini est calculé par la série dérivée terme à terme de f. Donc, en utilisant l'expression du produit de deux sommes de séries entières (dans ce cas le carré d'une somme de série entière) à l'intérieur des disques de convergence, on trouve :
$$\begin{aligned}2f'(z) &= 2\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}z^n = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{(n+1)!}u_{n+1}z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u_k u_{n-k}z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}u_k u_{n-k}z^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}a_k a_{n-k}z^n = f(z)^2.\end{aligned}$$
3. Comme $f(0) = u_0 = 1$, on a $1/f(z)$ convergente dans un disque non vide D centré en 0 et dans le même disque $(1/f(z))' = -f'(z)/f^2(z) = -1/2$. Ainsi, $1/f(z) = -z/2 + c$, c étant une constante. Aussi, $1 = f(z)$ impose $c = 1$ donc $f(z) = 2/(2-z)$ pour tout z dans D. Par conséquent, l'expression en série entière de f est le développement de $2/(2-z)$, par unicité de celui-ci. Le rayon de convergence de cette série ne peut donc être supérieur à 2. Conclusion $R = 2$.