Analyse – Math31

Temps disponible : 2 heures

Exercice 1. Soit $I = [a, b]$ un intervalle borné de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

1. Rappeler la définition de f intégrable au sens de Riemann.
2. Démontrer que, si f est monotone, alors f est intégrable.
3. Montrer qu'il en est de même s'il existe une subdivision $(a_0, \dots, a_n)$ de I telle que f est monotone sur les intervalles $[a_i, a_{i+1}]$, pour $i = 0, \dots, n-1$.

Corrigé 1. Question de cours, correction rapide.

1. Au sens de Riemann, f est intégrable si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe g et h fonctions en escalier telles que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ quelque soit $x \in I$ et $\int_I h - \int_I g \leq \varepsilon$.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Supposons f croissante, la preuve si f est décroissante étant analogue. On choisit $n \in \mathbb{N}$ tel que, en posant $\delta := (b-a)/n$, on obtienne $\delta(f(b) - f(a) < \varepsilon$. On considère ensuite la subdivision $(b_0, \dots, b_n)$ définie par $b_i = a + i\delta$. Pour $i = 1, \dots, n$, on pose $g(x) = f(x_{i-1})$ et $h(x) = f(x_i)$ pour tout $x \in [b_{i-1}, b_i]$ et $g(b) = h(b) = f(b)$. Alors, $\forall x \in I$, on a $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ car f est croissante. De plus on calcule :
$$\int_I h - \int_I g = \sum_{i=1}^{n} \delta f(b_i) - \sum_{i=1}^{n} \delta f(b_{i-1}) = \delta(f(b) - f(a)) < \varepsilon.$$
Donc f est intégrable.
3. Soit $\varepsilon > 0$, $I_i = [a_i, a_{i+1}]$ et $f_i := f|_{I_i}$.D'après la question précédente on a, pour $i = 1, \dots, n$, des fonctions en escalier g_i et h_i avec $g_i \leq f_i \leq h_i$ et $\int_{I_i} h_i - \int_{I_i} g_i < \varepsilon/n$. Donc on a des fonctions en escalier g et h sur I constuites à partir de g_i et h_i sur chaque I, satisfaisant à $g \leq f \leq h$ et :
$$\int_I h - \int_I g = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{I_i} h_i - \int_{I_i} g_i \right) < n\frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon.$$
Ainsi f est intégrable.

Exercice 2. Soit $a \in \mathbb{R}_{>0}$ et $\vartheta \in [0, \pi/2[$. Déterminer la nature des séries $\sum_{n \geq 2} u_n$ suivantes :

$$u_n = \frac{1}{n\cos^2(n)\sin^2(n)}; \qquad u_n = \frac{\tan^n(\pi/3)}{2^{n+2}}; \qquad u_n = \frac{n^2+1}{na^n};$$
$$u_n = (-1)^n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}); \qquad u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}; \qquad u_n = \frac{1}{(\ln(n))^n}.$$

Dire si la quatrième série est absolument convergente. En utilisant la décomposition en éléments simples, calculer la somme de la cinquième série. Qu'arrive-t-il à la deuxième série si on divise u_n par $\cos^n(\vartheta)$?

Corrigé 2. On numérote les séries de 1 à 6.

1. Cette série est divergente. En effet, elle est à termes positifs et, comme $\cos^2(n) \leq 1$ et $\sin^2(n) \leq 1$:
$$u_n \geq \frac{1}{n},$$
série harmonique divergente, ainsi u_n diverge car elle est minorée par une série divergente.
2. A multiplication près par un facteur $1/4$, c'est une série géométrique de raison $\tan(\pi/3)/2 = \sqrt{3}/2 < 1$, donc convergente. Si on multiplie par $\cos^{-n}(\vartheta)$, cela reste une série géométrique, cette fois de raison $\sqrt{3}/2\cos(\vartheta)^{-1}$. On a donc convergence ssi $\vartheta < \pi/6$.
3. C'est une série à termes positifs, on peut donc utiliser d'Alembert qui donne :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{((n+1)^2+1)na^n}{(n^2+1)(n+1)(a+1)^{n+1}} \sim \frac{n^3a^n}{n^3a^{n+1}} = \frac{1}{a}.$$
Donc la série converge si $a > 1$ et diverge si $a < 1$. Si $a = 1$, u_n ne tend pas vers 0 ce qui implique divergence de la série.
4. C'est un classique. Posons $v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. On voit que $v_n > 0$ pour tout $n \geq 0$, donc u_n est une série alternée et $v_n = |u_n|$. On vérifie que v_n décroit vers 0, au fait $v_n < v_{n-1}$ pour $n \geq 1$ car :
$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} < 2\sqrt{n},$$
ce que l'on vérifie en prenant les carrés :
$$2\sqrt{n^2-1} < 4n - ((n+1)+(n-1)).$$
De plus :
$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0.$$
Donc par le critère de convergence des séries alternées, $\sum u_n$ converge. En revanche $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente (elle est donc semiconvergente) car :
$$\sum_{k=2}^{n} v_k = \sqrt{n+1} - \sqrt{2},$$
ce qui tend vers $+\infty$.
5. Cette série converge car $u_n \geq 0$ est équivalent à $1/n^3$, terme général d'une série de Riemann convergente. On en calcule la somme d'abord en prenant la décomposition en éléments simples :
$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{n+2}.$$
La somme partielle devient :
$$\sum_{k=2}^{n} u_k = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{n+1}\frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=4}^{n+2}\frac{1}{k} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right).$$
La partie qui dépend de n tend vers 0 alors que la constante vaut $1/12$. La somme de la série est $1/12$.
6. C'est une série à termes positifs. On utilise Cauchy :
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n)} = 0 < 1,$$
la série converge.

Exercice 3. Soit f et g le fonctions de variable réelle définies par :

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right), \qquad g(x) = (x+1)\ln(x+1).$$

1. Calculer $f'(x)$ puis développer f' en série entière autour de 0 à l'aide d'une série géométrique.
2. Donner le développement de f en série entière autour de 0. Quel est son rayon ?
3. Développer g en série entière autour de 0.
4. Quel est le rayon du développement de g ? Quel est le développement limité à l'ordre 4 de g en 0 ?

Corrigé 3. La fonction f est définie et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ tandis que g est indéfiniment dérivable sur $]-1,+\infty[$.

1. On calcule :

$$f'(x) = -\frac{2\,x}{x^4+1}.$$

   On écrit alors, sur $]-1,1[$:

$$\frac{1}{x^4+1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{4k},$$

   donc :

$$\frac{-2x}{x^4+1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}2x^{4k+1}.$$

2. On obtient de la question précédente en prenant la primitive de la série entière terme à terme :

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}x^{4k+2}.$$

   pour un certain $a_0 \in \mathbb{R}$. Enfin $f(0) = \arctan(1) = \pi/4$. Ce développement a rayon 1.
3. On sait que dans $]-1,1[$:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n.$$

   On a donc :

$$g(x) = \ln(1+x) + x\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^{n+1} =$$
$$= x + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{(-1)^n}{n-1}\right)x^n = x + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n.$$

4. Le rayon du développement est 1 car le développement de $\ln(1+x)$ a rayon 1 tandis que les autres fonctions utilisées sont développables sur $\mathbb{R}$. Le développement demandé :

$$x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + o(x^4).$$

Exercice 4. Nous souhaitons établir un développement en série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ de la fonction :

$$f(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}\int_0^x e^{\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

1. Montrer que f est développable en série entière autour de 0.
2. Calculer $f'(x) = -xf(x) + 1$.

3. En déduire, par dérivation de la série terme à terme :
$$a_0 = 0, \qquad a_1 = 1, \qquad a_{n-1} + (n+1)a_{n+1} = 0, \quad \forall n \geq 1.$$
4. Déduire $a_0 = a_2 = \cdots = a_{2n} = 0$, $a_3 = -1/3$, $a_5 = 1/15$ et finalement :
$$a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}.$$
5. Calculer le rayon de convergence du développement trouvé de f.

Corrigé 4. Exercice classique sur l'intégrale de Gauss.

1. L'exponentielle étant développable avec rayon de convergence infini, il en est de même de l'intégrale $\int_0^x e^{\frac{t^2}{2}}$ et par conséquent de la fonction f.
2. C'est un calcul évident.
3. Par dérivation terme à terme on a :
$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$
On déduit de $f'(x) - xf(x) = 1$ la relation :
$$a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n-1} + (n+1)a_{n+1})x^n = 1,$$
ce qui entraîne la relation cherchée par unicité du développement en série entière.
4. La relation de récurrence entraîne deux relations, l'une sur les termes paires, l'autres sur les termes impaires. Pour les termes paires, on a $a_0 = 0$ et a_{2n+2} est un multiple de a_{2n} donc tous ces termes sont nuls. Pour n impair, disons $n = 2k+1$ on trouve :
$$a_1 = 1, \qquad a_{2k+1} = -\frac{1}{2k+1} a_{2k-1},$$
et on vérifie par récurrence que la formule proposée satisfait à cette relation car si on pose
$$a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{\prod_{j=1}^k (2j+1)},$$
alors bien sûr $a_1 = 1$ et $a_{2k+1}/a_{2k-1} = (-1)^k/(2k+1)$.
5. Le rayon est infini. On le savait dès le départ, mais on peut aussi le retrouver à partir de l'expression de $|a_{2n+1}|$ grâce au critère de d'Alembert. En effet, les termes impairs étant nuls, on a convergence en x si $|a_{2n+1}x^{2n+1}|/|a_{2n-1}x^{2n-1}|$ est borné, ce qui arrive pour tout x car ce terme vaut $|x|^2/(2n+1)$, ce qui reste borné en n.