Analyse – Math3A

Temps disponible : 2 heures

Documents et calculatrices interdits. Toutes les réponses doivent être justifiées. On pourra admettre la réponse à une question afin de répondre aux questions suivantes.

Exercice 1. Soit (u_n) suite numérique et $a \in \mathbb{R}$. On abrège VA pour « valeur d'adhérence ».

1. *Donner la définition de « a est VA de (u_n) » puis de « $+\infty$ est VA de (u_n) ».*
2. Soit a VA de (u_n). Montrer que, pour $k \in \mathbb{N}$, il existe $n > 10^k$ tel que $|u_n - a| < 10^{-k}$.
3. *Montrer que, si (u_{n_k}) est une suite extraite qui converge vers a, alors a est VA de (u_n).*
4. *Soit a une VA de (u_n). Construire $\mathbb{N} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{N}$ strictement croissante avec $\lim_{n\to\infty} u_{\varphi(n)} = a$.*
5. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $w_n = \sin(2n\pi/3)$, $z_n = \cos(n\pi/2)$ et $v_n = w_n z_n$.
   a) Trouver les VA de (w_n) et (z_n).
   b) Dire quelles sont les VA de (v_n) puis donner $\limsup_{n\to\infty} v_n$ et $\liminf_{n\to\infty} v_n$.
   c) Dire s'il est vrai que $\lim_{k\to\infty} w_{n_k} = a$ si et seulement si $\lim_{k\to\infty} v_{n_k} = a$.

   Les questions en italique sont des « questions de cours ».

Corrigé 1. On traite de façon sommaire les questions de cours.

1. Par définition a est VA de (u_n) si pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble
$$E(a,\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} \mid |u_n - a| < \varepsilon\}$$
est infini. Par définition $+\infty$ est VA de (u_n) si (u_n) n'est pas majorée.
2. Soit a VA de (u_n) et $k \in \mathbb{N}$. Posons $\varepsilon = 10^{-k}$. Alors l'ensemble $E = E(a,\varepsilon)$ est infini, donc il existe bien un élément $n \in E$ tel que $n > 10^k$. Ainsi, $|u_n - a| < 10^{-k}$.
3. Soit (u_{n_k}) suite extraite qui converge vers a. Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe donc $K \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq K$ implique $|u_{n_k} - a| < \varepsilon$, i. e. $n_k \in E(a,\varepsilon)$. Alors $E(a,\varepsilon)$ contient $\{n_k \mid k \geq K\}$ de sorte que $E(a,\varepsilon)$ est infini. Ainsi, a est VA de (u_n).
4. Comme a est VA de (u_n), on a que pour tout entier $k \geq 1$, l'ensemble $E(a, 1/k)$ est infini. Ainsi, une fois fixé $n_0 = 0$ on peut poser pour tout $k \geq 1$:
$$n_k = \min\{m \in \mathbb{N} \mid m > n_{k-1}, |u_m - a| < 1/k\},$$
En effet, comme $E(a,1/k)$, il existe bien un élément m de $E(a,1/k)$ strictement supérieur à n_{k-1} ; du coup n_k est le plus petit parmi ses éléments. On voit alors que (u_{n_k}) tend vers a.
5. Soit $v_n = \cos(n\pi/2)\sin(2n\pi/3)$.
   a) Si on remplace n par $n + 12\pi$ on ne change pas la valeur de z_n ni de w_n. Ainsi, les valeurs possibles de v_n sont :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$z_n = \cos(n\pi/2)$	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0
$w_n = \sin(2n\pi/3)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$v_n = w_n z_n$	0	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	0	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0

   Donc les VA de (z_n) sont 0, -1 et 1 tandis que celles de (w_n) sont 0, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) On voit que les VA de (v_n) sont $0, -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}$. On en déduit que $\limsup_{n\to\infty} v_n = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\liminf_{n\to\infty} v_n = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Les VA de (v_n) et (w_n) sont $\{0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\}$.

c) Même si (v_n) et (w_n) ont mêmes VA, les deux affirmations sont fausses. Par exemple, pour $n_k = 2+12k$, on a $\lim_{k\to\infty} w_{n_k} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\lim_{k\to\infty} v_{n_k} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Aussi, pour $n_k = 2+6k$ on a $\lim_{k\to\infty} w_{n_k} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ tandis que (v_{n_k}) n'a pas de limite car $v_{n_k} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ si k est pair et $v_{n_k} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ si k est impair.

Exercice 2. Étudier la nature des séries $\sum_{n\geq 1} u_n$ de terme général (u_n) suivantes.

a) $u_n = \frac{1}{\ln(n+1)^n}$,

b) $u_n = (-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$;

c) $u_n = \frac{2}{\ln(n^3+n^2+n+1)}$;

d) $u_n = n!a^n/n^n$, si $a \in]0, 1/5[$ ou $a > 5$;

e) $u_n = (-1)^{3n}(\cos(n\sqrt{2})+n)$;

f) $u_n = \frac{(n+1)\sin^3(n)}{(n+2)^2(\sqrt{n}+2)}$.

On étudiera, pour les séries à signe variable, la convergence simple et absolue.

Corrigé 2. Rappelons qu'une série est semiconvergente si elle converge mais pas absolument.

a) $u_n = (\ln(n+1))^{-n}$. Dans ce cas $\sum u_n$ est positive. On applique le critère de Cauchy, ce qui donne :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln(n)^{-n}} = \lim_{n\to\infty} \ln(n)^{-1} = 0,$$

donc la série $\sum u_n$ converge.

Pour ceux qui auraient compris que la série était $u_n = \frac{1}{\ln((n+1)^n)}$, on écrit :

$$\ln((n+1)^n) = n\ln(n+1) \sim n\ln(n),$$

ce qui est une série de Bertrand divergente. Par ailleurs, rappelons que dans ce cas la série de Bertrand diverge car $1/(n\ln(n)) \sim \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n))$ et cette dernière série diverge comme on le voit en la considérant comme série téléscopique.

b) On voit que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ est positif, donc il s'agit d'une série alternée. On a $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$. Aussi, $v_{n+1} - v_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} - 2\sqrt{n} \leq 0$, ce que l'on voit car :

$$(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})^2 = 2n + 2\sqrt{n^2-1} \leq 4n = (2\sqrt{n})^2,$$

cette inégalité étant due à :

$$(\sqrt{n^2-1})^2 = n^2 - 1 \leq n^2.$$

Ainsi (v_n) est décroissante donc la série $\sum(-1)^n v_n$ converge. Par contre, $\sum u_n$ ne converge pas absolument car $\sum v_n$ diverge. En effet $(2v_n)$ est équivalente à $1/\sqrt{n}$ qui est une série de Riemann divergente.

c) On a $\sum u_n$ positive et $u_n \sim 1/(3\ln(n))$ donc $\sum u_n$ diverge car $\sum 1/n$ diverge et, à partir d'un certain rang, on a $1/\ln(n) \geq 1/n$.

d) On a $u_n = n!a^n/n^n$ donc :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!a^{n+1}n^n}{n!a^n(n+1)^{(n+1)}} = \frac{a(n+1)n^n}{(n+1)^{(n+1)}} = a\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n}.$$

Cette expression tend vers a/e pour n qui tend vers $+\infty$, donc $\sum u_n$ converge si $a < e$ (donc si $0 < a < 1/5$) et diverge si $a > e$ (donc si $a > 10$).

e) Le terme général (u_n) ne tend pas vers 0 car $|u_n| \sim n$. Donc la série diverge.

f) On a :
$$|u_n| \leq \frac{(n+1)}{(n+2)^2(\sqrt{n}+2)} \sim \frac{n}{n^{5/2}} = n^{-3/2},$$
donc $\sum u_n$ converge absolument car $\sum n^{-3/2}$ est une série de Riemann convergente.

Exercice 3. Soit $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha < 1$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = a(n-1)^\alpha + n^\alpha + b(n+1)^\alpha$.

1. Rappeler le développement limité de $(1-x)^\alpha$ à l'ordre 1 en 0.
2. Soit $\alpha < -1$. Est-ce que $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge ?
3. Soit $\alpha \in [-1, 0[$. Montrer que $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge ssi $a + b + 1 = 0$.
4. Soit $\alpha \in [0, 1[$. Montrer que $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge ssi $a = b = -1/2$.

Notons $v_n = (n+1)^\alpha - n^\alpha$, supposons $\alpha \in [0, 1[$ et soit $a = b = -1/2$.

5. Exprimer u_n en fonction de v_n et v_{n-1} puis calculer $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Corrigé 3. D'abord, écrivons :
$$u_n = n^\alpha \left(a\left(1 - \frac{1}{n}\right)^\alpha + 1 + b\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha \right).$$

1. On a, dans un voisinage de 0 :
$$(1-x)^\alpha = 1 - \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2).$$
2. D'après le développement limité donné ci-dessus et l'expression de u_n, on a, pour n qui tend vers $+\infty$:
$$u_n = n^\alpha \left(1 + a + b - \alpha(a-b)\frac{1}{n} + o(1/n) \right).$$
Par comparaison avec la série de Riemann, pour $\alpha < -1$, cette série converge absolument quel que soit la valeur de a ou de b.
3. Soit $\alpha \in [-1, 0[$. Si $a + b + 1 \neq 0$, (u_n) a signe constant à partir d'un certain rang et on a $u_n \sim (1 + a + b)n^\alpha$ divergente (car $\alpha \geq -1$). Si $a + b + 1 = 0$ alors pour n qui tend vers $+\infty$ on a $|u_n| = \alpha|b - a|n^{\alpha-1} + o(n^{\alpha-1})$ donc $\sum u_n$ est convergente (car $\alpha < 0$).
4. Soit $\alpha \in [0, 1[$. Comme dans la question précédente on a $\sum u_n$ divergente si $a+b+1 \neq 0$. Si $a+b+1 = 0$ et $a-b \neq 0$ alors (u_n) est de signe constant à partir d'un certain rang et $u_n \sim \alpha(b-a)n^{\alpha-1}$ donc $\sum u_n$ diverge (car $\alpha \geq 0$). Si $a + b + 1 = 0$ et $a - b = 0$, i. e. si $a = b = -1/2$ alors $u_n = o(n^{\alpha-2})$ donc $\sum u_n$ converge car $\alpha < 1$.
5. On remarque que, comme $a = b = -1/2$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$u_n = \frac{1}{2}(v_{n-1} - v_n).$$
Ainsi :
$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} v_{k-1} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} v_k = \frac{1}{2}v_0 - \frac{1}{2}v_n = \frac{1}{2} - (n+1)^\alpha + n^\alpha.$$
On en obtient :
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \frac{1}{2} - \lim_{n\to\infty} \left((n+1)^\alpha - n^\alpha\right) = \frac{1}{2}.$$

Exercice 4. Notons $f(x) = (x+1)/(x^2+1)$. Soit $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que (u_n) est bornée.

2. Vérifier que $f(f(x)) - x = (x^2 - x + 2)(x^2 + x + 1)(1 - x)/g(x)$ où g est un polynôme sans racine réelle. Étudier le signe de $f(f(x))$, $f(f(x)) - 1$ et $f(f(x)) - x$.
3. Déduire que les suites $(u_{2n})_{n\geq 1}$ et $(u_{2n+1})_{n\geq 1}$ sont monotones puis qu'elles convergent.
4. Conclure que (u_n) converge et calculer sa limite. Est-ce que (u_n) est monotone à partir d'un certain rang ?

Corrigé 4. Rappelons qu'une suite dont les termes pairs et impairs convergent vers la même limite réelle a converge aussi vers a.

a) L'application f est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. On en déduit que f est bornée.

Rappelons une preuve de ce dernier fait. Fixons un réel $\varepsilon > 0$. Alors il existe $N_1, N_1 \in \mathbb{R}$ tels que $x \geq N_1 \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$ et $x \leq N_2 \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$. En particulier, pour $N = \max\{N_1, N_2\}$ on a $|x| \geq N \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon$; puis comme $|f|$ est continue sur $[-N, N]$ on peut poser $M = \max\{|f(x)| \mid x \in [-N, N]\}$. Finalement pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|f(x)| \leq \max\{M, \varepsilon\}$. Ainsi f est bornée et par conséquent (u_n) aussi.

b) On calcule :

$$\begin{aligned} f(f(x)) - x &= -x + \left(\frac{x+1}{x^2+1} + 1\right) \Big/ \left(\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)^2 + 1\right) = \\ &= -x + \left(\frac{x^2+x+2}{x^2+1}\right) \Big/ \left(\frac{(x^2+1)^2 + (x+1)^2}{(x^2+1)^2}\right) = \end{aligned}$$

si on pose $g(x) = (x^2+1)^2 + (x+1)^2 = x^4 + 3x^2 + 2x + 2$:

$$\begin{aligned} &= -x + \frac{x^2+x+2}{x^2+1} \cdot \frac{(x^2+1)^2}{g(x)} = \\ &= \frac{(x^2+x+2)(x^2+1) - xg(x)}{g(x)} = \\ &= \frac{(x^2-x+2)(x^2+x+1)(1-x)}{g(x)}. \end{aligned}$$

Le polynôme g n'a pas de racine réelle car il est somme non nulle de deux carrés. On voit que les facteurs de degré 2 du numérateur de $f(x) - x$ n'ont pas de racine réelle. En particulier, le seul point fixe de f est 1. Aussi le signe de $f(f(x)) - x$ est le même que celui de $(1 - x)$. Conclusion, $f(f(x)) > x$ ssi $x < 1$ et $f(f(x)) < x$ ssi $x > 1$.

On calcule $f(f(x))$ et $f(f(x)) - 1$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} f(f(x)) - 1 &= \frac{x^3 - x}{x^4 + 3x^2 + 2x + 2} = \frac{x(x^2-1)}{g(x)}. \\ f(f(x)) &= \frac{(x^2+x+2)(x^2+1)}{x^4 + 3x^2 + 2x + 2} = \frac{(x^2+x+2)(x^2+1)}{g(x)}. \end{aligned}$$

Ainsi $f(f(x)) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ car $x^2 + x + 2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Aussi, $f(f(x)) > x$ ssi $-1 < x < 0$ ou $x > 1$.

c) Par la question précédente on a, pour $k \in \mathbb{N}$ donné :

— Si $u_k \in \{-1, 0, 1\}$, alors $u_{k+2n} = 1$ pour tout $n \geq 1$.

— Si $u_k < -1$ ou $0 < u_k < 1$, alors $(u_{k+2n})_{n\geq 1}$ est strictement croissante dans $]0, 1[$.

— Si $-1 < u_k < 1$ ou $u_k > 1$, $(u_{k+2n})_{n\geq 1}$ est strictement décroissante dans $]1, +\infty[$.

Donc quel que soit la valeur de u_0, la suite $(u_{2n})_{n\geq 1}$ est monotone (croissante si $u_0 \leq -1$ ou $0 \leq u_0 \leq 1$, décroissante autrement). De même, quel que soit la valeur de u_1, la suite $(u_{2n+1})_{n\geq 1}$ est monotone. Aussi, $(u_{2n})_{n\geq 1}$ est monotone et bornée, elle converge donc. De même pour $(u_{2n+1})_{n\geq 1}$.

d) D'après la question précédente, $(u_{2n})_{n\geq 1}$ est convergente, soit a sa limite. Comme f et continue, $f \circ f$ l'est aussi, de sorte que a doit être un point fixe de f, ainsi nécessairement $a = 1$. De même $(u_{2n+1})_{n\geq 1}$ converge vers a. Ceci implique que (u_n) converge vers 1.

Concernant la monotonie, évidemment (u_n) est monotone si $u_0 \in \{-1, 0, 1\}$, donc (u_n) peut être monotone. Cependant elle ne l'est pas toujours, car par exemple si $u_0 > 1$ on a vu que $(u_{2n})_{n\geq 1}$ est strictement décroissante. Mais $u_0 > 1$ implique $0 < u_1 < 1$ donc $(u_{2n+1})_{n\geq 1}$ est strictement croissante, de sorte que (u_n) n'est pas monotone à partir d'un certain rang.