Analyse – Math3A

Temps disponible : 2 heures

Documents et calculatrices interdits. Toutes les réponses doivent être justifiées. On pourra admettre la réponse à une question afin de répondre aux questions suivantes.

Exercice 1 (Question de cours). Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On étudiera la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} 1/n^\alpha$.

1. Vérifier que la suite des sommes partielles de $\sum 1/n$ n'est pas de Cauchy.
2. En déduire que $\sum 1/n^\alpha$ diverge si $\alpha \leq 1$.
3. Soit $\alpha \in]1, 2[$. Trouver $\sum v_n$ téléscopique convergente avec (v_n) équivalente à $(1/n^\alpha)$.
4. En déduire que $\sum 1/n^\alpha$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Corrigé 1. Les réponses sont dans le cours. Rapidement :

1. On prend $\varepsilon \in]0, 1/2[$ on fixe N naturel et $n \geq N$, $p = n$ donc :
$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \geq \varepsilon.$$
2. Par comparaison, comme $1/n^\alpha \geq 1/n$ si $\alpha \leq 1$, on a divergence de $\sum 1/n^\alpha$.
3. On utilise $f(x) = \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}$ puis en utilisant les accroissements finis on trouve $x_n \in [n, n+1]$ (donc $x_n^{-\alpha} \sim n^{-\alpha}$) tel que $f'(x_n) = f(n+1) - f(n)$.
4. Par comparaison de nouveau.

Exercice 2. Soit (a_n) et (b_n) suites numériques. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = a_n b_n$, puis $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $b'_n = b_{n+1} - b_n$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\sum_{k=0}^{n} u_k = A_n b_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b'_k.$$
2. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 1/7^n$ et $b_n = n$. Déduire :
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{7^n} = \frac{7}{36}.$$

Corrigé 2. La réponse à la première question est le petit calcul qui figure dans la preuve du théorème d'Abel. Pour la deuxième question, on a pour $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, si on pose $a_n = a^n$:

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$

Puis $b'_n = 1$ donc en utilisant la première question :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} ka^k =& n\frac{1-a^{n+1}}{1-a} - \sum_{k=0}^{n-1} A_k = \\ =& n\frac{1-a^{n+1}}{1-a} - \frac{n}{1-a} + \frac{1}{1-a}\sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} = \\ =& \frac{1}{1-a}\left(n - na^{n+1} - n + \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1}\right) = \\ =& \frac{1}{1-a}\left(-na^{n+1} - 1 + \sum_{k=0}^{n} a^{k}\right) = \\ =& \frac{1}{1-a}\left(-na^{n+1} - 1 + \frac{1-a^{n+1}}{1-a}\right) = \\ =& \frac{1}{1-a}\left(-na^{n+1} + \frac{a-a^{n+1}}{1-a}\right).\end{aligned}$$

Donc, si $|a| < 1$, $a \neq 1$, en prenant la limite lorsque n tend vers ∞ on trouve :

$$\sum_{n=0}^{\infty} na^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} ka^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-a}\left(-na^{n+1} + \frac{a-a^{n+1}}{1-a}\right) = \frac{a}{(1-a)^2}$$

Si $a = 1/7$ on trouve $\frac{a}{(1-a)^2} = 7/36$.

Exercice 3. Étudier la nature des séries $\sum u_n$ de terme général (u_n) suivantes.

a) $u_n = \frac{\sin(\ln n)}{\sqrt{n}^3}$,

b) $u_n = \frac{n^{an}}{n!}$, pour $a \in \mathbb{R}$,

c) $u_n = \sqrt{n}\sin(1/\sqrt{n})$,

d) $u_n = \left(\frac{n+1}{2n-7}\right)^{2n}$,

e) $u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$,

f) $u_n = \ln\left(\frac{n^3-n+1}{n^3-n-1}\right)$.

Calculer la somme $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ de la série e).

Corrigé 3. On utilisera des critères et quelqes développements limités.

a) $u_n = \frac{\sin(\ln n)}{\sqrt{n}^3}$. On montre que cette série est absolument convergente par comparaison aver Riemann d'exposant $3/2$ car $|\sin(\ln n)| \leq 1$.

b) $u_n = \frac{n^{an}}{n!}$, pour $a \in \mathbb{R}$. Ici on utilise d'Alembert (c'est une série positive) :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{a(n+1)}}{(n+1)!}\frac{n!}{n^{an}} = \frac{(n+1)^{a(n+1)}}{n+1}\frac{1}{n^{an}} = \frac{(n+1)^{an}}{n^{an}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{an}.$$

Ainsi, on trouve :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = e^a.$$

De cette façon, si $a < 0$ la série converge, si $a > 0$, elle diverge. Si $a = 0$ la série converge et sa somme vaut $e - 1$.

c) $u_n = \sqrt{n}\sin(1/\sqrt{n})$. Le terme général de cette série tend vers 1, donc nous avons divergence.

d) $u_n = \left(\frac{n+1}{2n-7}\right)^{2n}$. C'est une série positive. Par Cauchy, on regarde :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{2n-7}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

donc la série converge.

e) Cette série converge par comparaison avec la série de Riemann $\sum 1/n^3$. Pour calculer sa somme, on décompose en éléments simples donc on cherche $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que :

$$u_n = \frac{1}{(n+3)(n+2)(n+1)} = \frac{a}{n+3} + \frac{b}{n+2} + \frac{c}{n+1}.$$

On écrit alors :

$$1 = a(n+1)(n+2) + b(n+1)(n+3) + c(n+2)(n+3).$$

Cette égalité doit valoir pour tout n. On en obtient une identité polynomiale en la variable n. Par conséquent l'égalité est satisfaite pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On obtient, pour $n = -1$ la valeur $c = 1/2$; puis pour $n = -2$ on trouve $b = -1$ et enfin pour $n = -3$ on a $a = 1/2$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{2}\frac{1}{k+1}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\ell=3}^{n+3}\frac{1}{\ell} - \sum_{\ell=2}^{n+2}\frac{1}{\ell} + \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{n+1}\frac{1}{\ell} = \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{n+3} + \frac{1}{2}\frac{1}{n+2} + \frac{1}{2}\sum_{\ell=3}^{n+1}\frac{1}{\ell} - \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} - \sum_{\ell=3}^{n+1}\frac{1}{\ell} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sum_{\ell=3}^{n+1}\frac{1}{\ell} = \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{n+3} - \frac{1}{2}\frac{1}{n+2} + \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

On obtient finalement :

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} u_k = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{n+3} - \frac{1}{2}\frac{1}{n+2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}.$$

f) $u_n = \ln\left(\frac{n^3-n+1}{n^3-n-1}\right)$. C'est une série positive, car le dénominateur est plus petit que le numérateur. On écrit :

$$\begin{aligned}
u_n &= \ln(n^3-n+1) - \ln(n^3-n-1) = \\
&= \ln(n^3-n+1) - \ln(n^3) - (\ln(n^3-n-1) - \ln(n^3)) = \\
&= \ln\left(1 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right) = \\
&= -\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + o(1/n^3) = \\
&= \frac{2}{n^3} + o(1/n^3),
\end{aligned}$$

ainsi la série converge car elle est équivalente à la série de Riemann $\sum 1/n^3$.

Exercice 4. Soit (u_n) une suite bornée telle que $(u_{n+1} - u_n)$ tend vers 0. Supposons que $a < b$ soient deux valeurs d'adhérence de (u_n).

Nous voulons montrer que tout $c \in]a, b[$ est aussi valeur d'adhérence de (u_n). Dans ce but, fixons $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \min\{b-c, c-a\}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$ on ait $|u_{n+1} - u_n| < \varepsilon$.

1. Justifier qu'il existe $n_1 \geq n_0$ tel que $u_{n_1} < c$ puis qu'il existe $n_2 \geq n_1$ tel que $u_{n_2} > c$.
2. Soit $M = \{k \in \{n_1, \dots, n_2\} \mid u_k < c\}$. Justifier que M admet un maximum m et que :
$$u_m < c \leq u_{m+1}.$$
3. En déduire $|u_m - c| < \varepsilon$ puis que c est valeur d'adhérence de (u_n).
4. Conclure que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est $[\liminf u_n, \limsup u_n]$.

Corrigé 4. On utilise la définition de valeur d'adhérence.

1. Comme a est valeur d'adhérence de (u_n), on sait qu'il existe $n_1 \geq n_0$ tel que $|u_{n_1} - a| < \varepsilon$. Donc $u_{n_1} < a + \varepsilon < a + c - a = c$. De même il existe $n_2 \geq n_1$ tel que $|u_{n_2} - b| < \varepsilon$ donc $u_{n_2} > b - \varepsilon > b + c - b = c$.
2. L'ensemble M est une partie de $\mathbb{N}$ donc il adment un élément maximum m à partir du moment que M est majoré et non vide. Or $n_1 \in M$ donc M n'est pas vide et M est majoré par n_2 par définition.

   Remarquons que $m \neq n_2$ car $u_{n_2} > c$. Autrement dit $m \leq n_2 - 1$. Maintenant, on a $m \in M$ donc $u_m < c$. Par ailleurs, comme $m \leq n_2 - 1$, on a $m + 1 \leq n_2$, donc le fait que $m + 1$ ne soit pas dans M implique $u_{m+1} \geq c$.
3. On a $u_m \leq u_{m+1}$ donc $|u_m - u_{m+1}| = u_{m+1} - u_m$. Puis $m \geq n_1 \geq n_0$ donc $u_{m+1} - u_m = |u_m - u_{m+1}| < \varepsilon$ i.e. $u_m > u_{m+1} - \varepsilon$. De même $|u_m - c| = c - u_m$ donc :
$$|u_m - c| = c - u_m < c - u_{m+1} + \varepsilon \leq c - c + \varepsilon = \varepsilon,$$
   où on a utilisé $u_{m+1} \leq c$. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, étant donné un entier p (quitte à supposer $\varepsilon < \min\{b - c, c - a\}$, ce qui est toujours possible) on peut trouver un entier $m \geq p$ (que l'on trouve en choisissant $n \geq \max\{n_0, p\}$ puis en suivant les questions précédentes) tel que $|u_m - c| < \varepsilon$. Ceci montre que c est valeur d'adhérence de (u_n).
4. On a vu en cours que, (u_n) étant bornée, $a := \liminf_{n\to\infty} u_n$ et $b := \limsup_{n\to\infty} u_n$ appartiennent à $\mathbb{R}$ est sont valeurs d'adhérence de (u_n). De plus, on sait que toute valeur d'adhérence c de (u_n) satisfait $a \leq c \leq b$. Donc l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est contenu dans $[a, b]$ et contient $\{a, b\}$. Par ce qu'on vient de voir dans les questions précédentes, si $c \in]a, b[$ alors c est valeur d'adhérence de (u_n), ce qui montre finalement que $[a, b]$ est l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n).