Analyse – Math31

Temps disponible: 2 heures

Exercice 1 (Question de cours)**.** On souhaite montrer qu'une suite numérique (u_n) est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.

a) Rappeler la définition de ce que (u_n) soit de Cauchy puis de Cauchy par intervalles.
b) Démontrer l'équivalence des deux définitions.
c) Montrer que (u_n) définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$ n'est pas de Cauchy.
d) Soit (u_n) convergente; démontrer que (u_n) est de Cauchy.
e) Montrer que, si (u_n) est de Cauchy par intervalles, alors il existe une suite d'entiers (N_k) et d'intervalles emboîtés (I_k) d'étendue $\leq 1/k$ et contenant u_n pour $n \geq N_k$.
f) Conclure.

Exercice 2. Étudier la nature des séries numériques de termes généraux suivants (pour les séries à termes de signe quelconque, on étudiera la convergence <u>et</u> la convergence absolue) :

a) $\left(\alpha + \frac{1}{n}\right)^n$; b) $\frac{(n!)^2}{(2n)!}$; c) $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$;

d) $\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$; e) $e^{-\sqrt{n}}$; f) $\frac{n-1}{n^3+3n^2+2n}$;

α étant un réel positif.

Considérons la dernière série. Quel est le plus petit n_0 à partir duquel elle est définie ? En calculer la somme, pour $n \geq n_0$ (on pourra montrer qu'il existe trois réels a, b et c, qu'on calculera, tels que : $\frac{X-1}{X^3+3X^2+2X} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X+2}$).

Exercice 3. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = f(u_n)$, où:

$$f(x) = \frac{x^3+6}{7}.$$

On souhaite étudier la convergence de (u_n) selon la valeur de u_0. Pour cela, on pose

$$g(x) = f(x) - x.$$

a) Montrer que f est monotone.
b) Vérifier que 1 est racine de g. Calculer α et γ, la plus petite et la plus grande racine de g.
c) Étudier le signe de g.
d) Montrer que, si $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}$ alors $\ell \in \{\alpha, 1, \gamma\}$. Qu'arrive-t-il si $u_0 \in \{\alpha, 1, \gamma\}$?
e) Déduire de la monotonie de f, par récurrence, que $u_0 \leq u_1$ implique (u_n) croissante.
f) Montrer que, si $u_0 < \alpha$ alors (u_n) décroit vers $-\infty$. Qu'arrive-t-il si $u_0 > \gamma$?
g) Démontrer que $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$ si $u_0 \in]\alpha, \gamma[$.

Exercice 4. Soit (u_n) une suite réelle telle que

$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty. \tag{1}$$

a) Écrire (1) en utilisant la définition de limite.
b) À l'aide du point précédent, montrer qu'il existe une suite extraite (u_{n_k}) croissante. Que vaut $\lim_{k\to\infty} u_{n_k}$?

Analyse – Math31

Corrigé

Corrigé 1. Les réponses se trouvent dans le polycopié du cours.

Corrigé 2. Posons $\sum u_n$ pour la série et u_n pour le terme général.

a) C'est une série positive. D'après la règle de Cauchy, on regarde

$$\lim_{n\to\infty} u_n^{1/n} = \lim_{n\to\infty} (\alpha + 1/n) = \alpha,$$

donc la série converge si $\alpha < 1$ et diverge si $\alpha > 1$. Si $\alpha = 1$, on a

$$\lim_{n\to\infty} u_n = e,$$

donc (u_n) ne tend pas vers 0. Ainsi $\sum u_n$ diverge.

b) C'est une série positive. Utilisons la règle de d'Alembert :

$$\lim_{n\to\infty} u_{n+1}/u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)!)^2(2n)!}{(2(n+1))!(n!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4} < 1,$$

la série converge.

c) C'est une série positive. Le terme dominant du dénominateur de u_n est $n^{3/2}$, ainsi $\sum u_n$ est équivalente à une série de Riemann $\sum 1/n^\alpha$ avec $\alpha = 3/2 > 1$, par conséquent la série converge.

d) On va montrer qu'il s'agit d'une série alternée. En effet, $n - \ln n \geq 0$ est défini pour $n \geq 1$ et vaut 1 pour $n = 1$. Ensuite, $n - \ln n$ est croissante car la fonction $f(x) = x - \ln x$ est dérivable sur son domaine $]0, +\infty[$ et sa dérivée vaut $f'(x) = 1 - 1/x = (x-1)/x$, elle est donc strictement positive si $x \geq 1$. Ainsi $n - \ln n \geq 1$, quelque soit $n \geq 1$.

Le même argument montre au fait que $1/(n - \ln n)$ est décroissante. Il est clair aussi que u_n tend vers 0 lorsque n tend vers ∞, donc $\sum(-1)/(n - \ln n)$ converge d'après le critère spécial pour les séries alternée.

Pour la convergence absolue, on a $|u_n| = 1/(n - \ln n) \sim 1/n$ et $\sum 1/n$ diverge donc la série est semiconvergente.

e) C'est une série positive. On a $2\ln(n) \leq \sqrt{n}$ à partir d'un certain rang $n_0 \geq 1$. En effet, la limite de $2\ln(n)/\sqrt{n}$ lorsque n tend vers ∞ est 0, donc quelque soit $\varepsilon \in]0,1[$, il existe n_0 tel que $n \geq n_0$ implique $2\ln(n) \leq \varepsilon\sqrt{n} < \sqrt{n}$. Ainsi, on trouve $-2\ln(n) \geq -\sqrt{n}$ donc :

$$e^{-\sqrt{n}} \leq e^{-2\ln(n)} = 1/n^2.$$

Or $\sum 1/n^2$ converge, donc $\sum e^{-\sqrt{n}}$ converge aussi.

f) On voit que $u_n = f(n)$ où:

$$f(x) = \frac{x-1}{x(x+1)(x+2)},$$

ainsi u_n est définie et positive à partir de $n = 1$. On voit que $u_n \sim 1/n^2$, série de Riemann convergente, donc $\sum u_n$ converge. Calculons la décomposition en éléments simples. En multipliant tout par $x(x+1)(x+2)$, on a:

$$x - 1 = a(x+1)(x+2) + bx(x+2) + cx(x+1).$$

En évaluant en $x = 0$ on en déduit $2a = -1$ donc $a = -1/2$. Puis en posant $x = -1$ on trouve $-2 = -b$ i. e. $b = 2$. Ensuite $x = -2$ donne $-3 = 2c$ i. e. $c = -3/2$.

On a donc
$$u_n = \frac{-1}{2}\frac{1}{n} + 2\frac{1}{n+1} + \frac{-3}{2}\frac{1}{n+2}.$$
On en déduit :
$$\sum_{n=1}^{m} u_n = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n} + 2\sum_{n=2}^{m+1}\frac{1}{n} - \frac{3}{2}\sum_{n=3}^{m+2}\frac{1}{n} = -1/2 - 1/4 + 1 + h(m),$$
où :
$$h(m) = -\frac{3}{2(m+2)} + \frac{2}{m+1} - \frac{3}{2(m+1)},$$
de sorte que $h(m)$ tend vers 0 lorsque m tend vers ∞. Ainsi :
$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \frac{1}{4}.$$

Corrigé 3. Le but est de montrer que (u_n) converge si et seulement si $u_0 \in [-3, 2]$ et que dans ce cas la limite vaut 1 lorsque $u_0 \in]-3, 2[$, ou -3 si $u_0 = -3$, ou 2 si $u_0 = 2$.

a) La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, en effet x^3 l'est, donc $x^3 + 6$ aussi et $(x^3 + 6)/7$ aussi.

b) On a, bien sûr $f(1) = 1$ donc $g(1) = 0$. Par divison euclidienne de $g(x)$ par $x - 1$, on trouve, en factorisant ensuite le polynôme quadratique :
$$g(x) = \frac{1}{7}(x-1)(x^2+x-6) = \frac{1}{7}(x-1)(x-2)(x+3).$$
On a donc $\alpha = -3$, $\beta = 2$.

c) Comme on peut le voir d'après le tableau de signes des termes de $g(x)$, on a $g(x) = 0$ ssi $x \in \{-3, 1, 2\}$ et :
$$\begin{aligned} g(x) &> 0 && \text{ssi } x \in]-3, 1[\cup]2, +\infty[, \\ g(x) &< 0 && \text{ssi } x \in]-\infty, -3[\cup]1, 2[. \end{aligned}$$

d) Si (u_n) converge vers ℓ, alors ℓ est limite de (u_{n+1}). Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, on a :
$$f(\ell) = f\left(\lim_{n\to\infty} u_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(u_n) = \lim_{n\to\infty} u_{n+1} = \ell,$$
donc ℓ est point fixe de f, i. e. ℓ est racine de g.

Bien sûr, si $u_0 \in \{-3, 1, 2\}$, alors $g(u_0) = 0$, i. e. $u_1 = f(u_0) = u_0$. De même, par récurrence, on voit $u_{n+1} = u_0$ pour tout $n \geq 0$. En effet ceci est valide pour $n = 0$, puis pour $n \geq 1$ on a $u_{n+1} = f(u_n)$ et par hypothèse de récurrence $u_n = u_0$ donc $u_{n+1} = f(u_0) = u_0$ car u_0 est point fixe de f. On a donc $\ell = u_0$ si $u_0 \in \{-3, 1, 2\}$.

e) Si $u_0 \geq u_1$ alors montrons par récurrence $u_{n+1} \leq u_n$ quelque soit $n \in \mathbb{N}$. C'est vrai pour $n = 0$, puis par hypothèse de récurrence on sait $u_n \leq u_{n-1}$ donc $u_{n+1} = f(u_n) \leq f(u_{n-1})$ par croissance de f, mais $f(u_{n-1}) = u_n$ donc $u_{n+1} \leq u_n$. Pour la même raison, si $u_0 \leq u_1$ alors (u_n) est croissante.

f) Soit $u_0 < \alpha = -3$. On a $g(u_0) < 0$ donc $u_1 = f(u_0) < u_0$, ainsi (u_n) est décroissante d'après le point précédent. Donc la suite (u_n) décroit vers $-\infty$ si et seulement si elle n'est pas minorée, ce qui arrive si et seulement si elle n'a pas de limite réelle. Mais si (u_n) avait une limite réelle ℓ, on aurait $\ell \in \{-3, 1, 2\}$. Or $u_n \leq u_0 < -3$ implique $\ell \leq u_0 < -3$. Donc ce cas est absurde et on fini par conclure que (u_n) tend vers $-\infty$. De même si $u_0 > 2$ la suite (u_n) croit vers $+\infty$.

g) Soit $u_0 \in]-3, 2[$. On a (u_n) croissante si $u_0 \in]-3, 1]$ et (u_n) décroissante si $u_0 \in [1, 2[$, d'après l'étude du signe de g. Donc si $(u_0) \in [1, 2[$ on a $u_n < 2$ pour tout n. De plus $u_n \geq 1$ pour tout n. En effet, c'est vrai pour $n = 0$, puis par croissance de f on a, quelque soit $n \geq 0$, $u_{n+1} = f(u_n) \geq f(1) = 1$, car $u_n \geq 1$ par hypothèse de récurrence. Donc, pour tout $(u_0) \in [1, 2[$, on obtient (u_n) décroissante et minorée, donc convergente, et ce vers un point fixe de f. Ce dernier ne peut être 2 car $u_0 < 0$ et (u_n) décroit, ni 3 car $u_n \geq 1$ pour tout n. On en conclut que (u_n) tend vers 1. De même lorsque $(u_0) \in]-3, 1]$ on voit que (u_n) tend vers 1.

Corrigé 4. Soit (u_n) une suite numérique qui tend vers $+\infty$.

a) Pour tout réel B il existe un entier $N(B)$ tel que, si $n \geq N(B)$, alors $u_n \geq B$.

b) Définissons (n_k) de la façon suivante. On pose $n_0 = 0$. Ensuite, pour tout $k \geq 1$, supposons défini par récurrence n_{k-1} et regardons $N_k := N(u_{n_{k-1}} + 1)$. D'après la définition, on a $u_m \geq u_{n_{k-1}} + 1 > u_{n_{k-1}}$ dès que $m \geq N_k$. Nous prenons :

$$n_k = \min\{m \in \mathbb{N} \mid m > n_{k-1}, m \geq N_k\}.$$

Ainsi, (n_k) est strictement croissante et comme $n_k \geq N_k$, on a $u_{n_k} > u_{n_{k-1}}$ pour tout $k \geq 1$, i. e. (u_{n_k}) est strictement croissante.

Cette suite extraite tend vers $+\infty$ tout comme (u_n).