Analyse – Math31

Temps disponible : 2 heures

Exercice 1 (Question de cours)**.** On souhaite montrer que la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

(a) Rappeler le critère de convergence des séries faisant appel aux suites de Cauchy. En déduire que la série de Riemann diverge si $\alpha = 1$.

(b) Rappeler le critère de convergence d'une série par majoration. En déduire que la série de Riemann diverge si $\alpha < 1$.

(c) Identifier une fonction dérivable f telle que $f'(x)$ est proportionnel à $x^{-\alpha}$ puis utiliser le théorème des accroissements finis pour estimer $v_n = f(n) - f(n-1)$.

(d) Montrer que $\sum v_n$ converge si $\alpha > 1$.

(e) Conclure que la série de Riemann converge si $\alpha > 1$.

Corrigé 1. Réponses rapides. Soit $u_n = n^{-\alpha}$.

(a) Soit $\alpha = 1$. On vérifie la condition de Cauchy sur $|u_n + \cdots + u_{n+p}|$ avec $p = n$ donc :
$$\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} \geq \frac{1}{2}.$$
Ainsi $1/n$ n'est pas de Cauchy, donc pas convergente.

(b) Critère : $0 \leq v_n \leq u_n$ et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum u_n$ diverge. Ici $\alpha < 1$ implique $u_n \geq 1/n$. Puis $\sum 1/n$ diverge par la question précédente, donc $\sum u_n$ diverge.

(c) $f(x) = x^{1-\alpha}$ et $f'(x) = (1-\alpha)x^{-\alpha}$. Accroissements finis : $\exists x_n \in [n-1, n]$ tel que
$$f'(x_n) = (1-\alpha)x_n^{-\alpha} = \frac{f(n) - f(n-1)}{n - (n-1)} = v_n,$$
d'où $x_n^{-\alpha} = v_n/(1-\alpha)$.

(d) La série $\sum v_n$ est télescopique et $\lim_{n\to\infty} f(n) = 0$ lorsque $\alpha > 1$. $\sum v_n$ converge donc.

(e) On a $u_n \sim x_n^{-\alpha}$. En effet $u_n = n^{-\alpha}$ et $x_n \in [n-1, n]$, donc x_n/n tend vers 1 et de même pour $u_n/x_n^{-\alpha}$. Ensuite, $x_n^{-\alpha}$ est proportionnel à v_n et $\sum v_n$ converge, donc $\sum x_n^{-\alpha}$ converge. $\sum u_n$ converge aussi.

Exercice 2. Définissons deux suites (x_n) et (y_n) par $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ et pour $n \geq 0$:
$$x_{n+1} = \frac{2x_n + 3y_n}{5}, \qquad y_{n+1} = \frac{3x_n + 2y_n}{5}.$$
Définissons aussi pour tout entier n, $w_n = y_n - x_n$.

(1) Calculer w_0, w_1 et w_2. Montrer que (w_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison. Calculer ensuite $\lim_{n\to\infty} w_n$.

(2) Exprimer $x_{n+1} - x_n$ en fonction de w_n. Est-ce que (x_n) est croissante, décroissante ? Mêmes questions pour (y_n).

(3) Montrer que (x_n) et (y_n) convergent vers une même limite réelle, notée a.

(4) Calculer $x_0 + y_0$ puis $x_{n+1} + y_{n+1}$ en fonction de $x_n + y_n$. En déduire la valeur de a.

Corrigé 2. Remarquons d'abord que (w_n) est une suite récurrente :

$$w_{n+1} = y_{n+1} - x_{n+1} = \frac{3x_n + 2y_n - 2x_n - 3y_n}{5} = -\frac{1}{5}(y_n - x_n) = -\frac{1}{5}w_n.$$

(1) On trouve $w_0 = 1$, $w_1 = -1/5$, $w_2 = 1/25$. On a $w_n = (-1/5)^n$, raison $-1/5$. Donc $\lim_{n\to\infty} w_n = 0$.

(2) On trouve :

$$x_{n+1} - x_n = \frac{3}{5}w_n = \frac{3}{5}\left(\frac{-1}{5}\right)^n.$$

De même $y_{n+1} - y_n = -\frac{3}{5}w_n$. Ainsi ni (x_n) ni (y_n) ne sont monotones.

(3) Nous avons plusieurs méthodes pour montrer que (x_n) et (y_n) convergent.
Méthode 1. Nous montrons que (x_n) est de Cauchy.

$$\begin{aligned}
|x_{n+p} - x_n| &= \left|\sum_{k=n}^{n+p-1} x_{k+1} - x_k\right| \\
&\leq \sum_{k=n}^{n+p-1} |x_{k+1} - x_k| \\
&\leq \frac{3}{5}\sum_{k=n}^{n+p-1}\left(\frac{1}{5}\right)^k \\
&\leq \frac{3}{5}\sum_{k=0}^{p-1}\left(\frac{1}{5}\right)^{k+n} \\
&\leq \frac{3}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^n\sum_{k=0}^{p-1}\left(\frac{1}{5}\right)^k \\
&\leq \frac{3}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^n\frac{1-(1/5)^k}{4/5} \\
&\leq \frac{3}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^n.
\end{aligned}$$

Or ce terme tend vers 0 indépendemment de p lorsque n tend vers l'infini. Donc la suite est de Cauchy. Elle est donc convergente vers une limite $a \in \mathbb{R}$. De même pour (y_n), on montre qu'elle tend vers a'. Mais $y_n - x_n$ tend vers 0, donc $a = a'$.

Méthode 2. Montrons que la partie impaire (x_{2n+1}) de (x_n) est décroissante. On a :

$$\begin{aligned}
x_{2n+1} - x_{2n-1} = x_{2n+1} - x_{2n} + x_{2n} - x_{2n-1} &= \frac{3}{5}(w_{2n} + w_{2n-1}) \\
&= \frac{3}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^{2n-1}\left(\frac{1}{5} - 1\right) = -\frac{12}{25}\left(\frac{1}{5}\right)^{2n-1} < 0.
\end{aligned}$$

De même on montre que (y_{2n+1}) est croissante. On finit par montrer que (y_{2n+1}) et (x_{2n+1}) sont adjacentes, sachant que $x_{2n+1} - y_{2n+1} = -w_{2n+1}$ est positif et tend vers 0. On en déduit que (x_{2n+1}) et (y_{2n+1}) tendent vers une même limite $a \in \mathbb{R}$.

Par le même raisonnement, on voit que (x_{2n}) est croissante, (y_{2n}) est décroissante, $(y_{2n} - x_{2n}) = w_{2n}$ est positif et tend vers 0, ce qui montre que (x_{2n}) et (y_{2n}) sont adjacentes et tendent donc vers une même limite $a' \in \mathbb{R}$.

Finalement, on écrit :

$$x_{2n+1} = \frac{2x_{2n} + 3y_{2n}}{5}.$$

Donc par passage à la limite :

$$a = \frac{2a' + 3a'}{5},$$

ce qui donne $a = a'$. Comme les suites extraites paires et impaires de (x_n) et (y_n) tendent vers a, c'est que (x_n) et (y_n) tendent vers a (fait en cours).

Méthode 3. Par calcul direct télescopé (cette méthode donne aussi la réponse aux questions suivantes). On a :

$$\begin{aligned} x_n &= x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} - x_k = 1 + \frac{3}{5}\sum_{k=0}^{n-1} w_k \\ &= 1 + \frac{3}{5}\frac{1-(-1/5)^n}{1-(-1/5)} = 1 + \frac{1}{2}\left(1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^n\right). \end{aligned}$$

En faisant tendre n à l'infini, on obtient :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{3}{2}.$$

Pour (y_n) on fait un calcul similaire, qui donne le même résultat.

(4) On voit que $x_{n+1} + y_{n+1} = x_n + y_n$, autrement dit $(x_n + y_n)$ est constante, elle vaut donc $x_0 + y_0 = 3$. On en déduit que $2a = 3$ donc que $a = 3/2$.

Exercice 3. Étudier la nature des séries numériques suivantes ($\alpha \in \mathbb{R}^*$) :

$$\sum_{n\geq 0}\left(\frac{n^2-1}{5n^2+n+1}\right)^{2n}, \qquad \sum_{n\geq 1}\frac{n}{\ln n}, \qquad \sum_{n\geq 1}\frac{\sin n}{n^2},$$

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n \ln n}{n}, \qquad \sum_{n\geq 1}\frac{3^n n!}{n^n}, \qquad \sum_{n\geq 2}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right).$$

Quelles séries sont absolument convergentes ? Calculer la somme de la dernière série.

Corrigé 3. J'appelle u_n le terme général.

(1) On applique la règle de Cauchy à série de terme général

$$u_n = \left(\frac{n^2-1}{5n^2+n+1}\right)^{2n},$$

qui est bien à termes positifs. On a

$$u_n^{1/n} = \left(\frac{n^2-1}{5n^2+n+1}\right)^2,$$

ce qui tend vers $(1/5)^2 = 1/25 < 1$ lorsque n tend vers l'infini. $\sum u_n$ converge. $\sum u_n$ converge aussi absolument (signe constant).

(2) Le terme général

$$u_n = \frac{n}{\ln n}$$

de notre série ne tend vers pas vers 0. La série diverge. Par ailleurs la somme devait commencer à 2 et non à 1 (faute de frappe).

(3) La série de terme général
$$u_n = \frac{\sin n}{n^2}$$
converge absolument. En effet, $|u_n| \leq 1/n^2$ et $\sum 1/n^2$ converge. $\sum u_n$ converge.

(4) Montrons que la série de terme général
$$u_n = \frac{(-1)^n \ln n}{n}$$
est semiconvergente. En effet, c'est une série alternée donc il suffit de voir que (u_n) est décroissante vers 0 (à partir d'un certain rang). Bien évidemment, $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. De plus, $f(x) = \ln(x)/x$ est indéfiniment dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f'(x) = (1-\ln(x))/x^2$ donc $f'(n) < 0$ pour $n > e$. Donc $(u_n)_{n\geq 3}$ est décroissante et $\sum(-1)^n u_n$ converge.

Par contre, $\sum |u_n|$ diverge, puisque $|u_n| \geq 1/n$ dès que $n \geq 3$ et $\sum 1/n$ diverge.

(5) La règle qui s'applique à la série (positive) de terme général
$$u_n = \frac{3^n n!}{n^n},$$
c'est clairement d'Alembert. On écrit :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = 3\left(\frac{n}{n+1}\right)^n,$$
ce qui tend vers $3/e > 1$. La série diverge.

(6) On utilise la somme télescopée pour la série de terme général
$$u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$
En effet, on écrit :
$$u_n = \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right) = \ln(n+1) + \ln(n-1) - 2\ln n.$$
Donc :
$$\sum_{k=2}^{n} u_k = \ln(n+1) - \ln n + \ln 1 - \ln 2,$$
et comme $\ln(n+1) - \ln n$ tend vers 0, la somme de cette série est $-\ln(2)$.

Cette série est de signe constant car $(n^2-1) < n^2$ donc $\ln((n^2-1)/n^2) < 0$. La convergence absolue est donc une conséquence de la convergence simple dans ce cas.

Exercice 4. Soit $f(x) = (1+x^2)/2$ et $u_0 \in \mathbb{R}$. Posons, pour tout entier $n \geq 0$:
$$u_{n+1} = f(u_n).$$

(1) Montrer que (u_n) est croissante.

(2) Étudier les points fixes de f, c'est-à-dire les $a \in \mathbb{R}$ tels que $f(a) = a$.

(3) Soit $|u_0| > 1$. Montrer par récurrence que $u_n > 1$ pour tout $n \geq 1$. Déduire de la question précédente que (u_n) diverge.

(4) Soit $|u_0| \leq 1$. Montrer par récurrence que $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout $n \geq 1$. En déduire que (u_n) converge. Vers quelle limite ?

Corrigé 4. On voit bien que (u_n) diverge si $|u_0| > 1$ converge si $|u_0| \leq 1$ par la dynamique sur la parabole.

(1) On écrit :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n^2 - u_n + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(u_n - 1)^2,$$

donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

(2) Par le même calcul que dans la question précédente, on trouve $f(a) = a$ si et seulement si $a = 1$.

(3) Soit $|u_0| > 1$. Remarquons que $u_{n+1} > u_n$ pourvu que $u_n > 1$ d'après le calcul dans la question (1). Ainsi, $u_n > 1$ implique $u_{n+1} > 1$. De plus, $u_1 = (1+u_0^2)/2 > 1/2+1/2$ donc $u_1 > 1$. On a donc par récurrence $u_n > 1$ pour tout $n \geq 1$.

Il s'en suit que (u_n) diverge. En effet, (u_n) étant croissante, si elle converge c'est vers $b = \sup u_n$. Mais la suite (u_n) étant récurrente et définie par une fonction f continue, elle ne peut converger que vers un point fixe de f, i. e. vers 1. Or $b > 1$ car $u_n > 1$, on a donc une contradiction.

(4) Soit $|u_0| \leq 1$. Bien sûr $u_{n+1} = (1+u_n^2)/2 \geq 0$ quelque soit $n \geq 1$. De plus, pour tout n, en supposant $u_n \leq 1$, on a $u_{n+1} = (u_n^2+1)/2 \leq (1+1)/2 = 1$. De même comme $u_0^2 \leq 1$ on a $u_1 \leq 1$. Par récurrence nous avons donc $0 \leq u_n \leq 1$, quelque soit n. La suite (u_n) est alors majorée et croissante donc convergente vers $b = \sup(u_n)$. Puis (u_n) étant récurrente, sa limite est un point fixe de f i. e. $b = 1$.