Analyse – Math31

Temps disponible : 2 heures

Exercice 1 (Question de cours)**.** On souhaite montrer que $\mathbb{R}$ est complet, autrement dit qu'une suite numérique (u_n) est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.

(a) Montrer que (u_n) est de Cauchy si (u_n) est convergente.

(b) Énoncer une condition équivalente à (u_n) suite de Cauchy en termes, pour $\varepsilon > 0$ fixé, d'un rang à partir duquel u_n appartient à un intervalle fermé d'étendue bornée par ε.

(c) En déduire, si (u_n) est de Cauchy, l'existence d'intervalles fermés I_k d'étendue bornée par $1/k$ contenant les u_n à partir d'un rang N_k.

(d) Utiliser les I_k pour construire une suite d'intervalles emboîtes.

(e) Énoncer le théorème des intervalles emboîtés.

(f) Conclure que (u_n) converge si (u_n) est de Cauchy.

Corrigé 1. C'est tiré du cours.

a) Soit a limite de (u_n). Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N_ε tel que $n \geq N_\varepsilon$ implique $|u_n - a| < \varepsilon$. Alors :
$$|u_n - u_m| = |u_n - a + a - u_m| \leq |u_n - a| + |u_m - a| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$
dès que $n, m \geq N_{\frac{\varepsilon}{2}}$.

b) Cauchy par intervalles : (u_n) est de Cauchy si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un intervalle fermé I d'étendue $\ell(I) \leq \varepsilon$ et un entier N_ε tel que $u_n \in I$ pour tout $n \geq N_\varepsilon$.

c) On pose $\varepsilon = \frac{1}{k}$ et on en obtient I_k fermé d'étendue $\ell(I_k) \leq \frac{1}{k}$ et des entiers N_k tels que $u_n \in I_k$ pour tout $n \geq N_k$.

d) On pose $J_1 = I_1$ et pour tout $k \geq 1$:
$$J_{k+1} = J_k \cap I_{k+1} = I_1 \cap \cdots \cap I_{k+1}.$$
Donc $J_{k+1} \subset J_k$ pour tout $k \geq 1$, de plus J_k est fermé et $\ell(J_k) \leq \ell(I_k) \leq \frac{1}{k}$ donc :
$$\lim_{k \to \infty} \ell(J_k) = 0.$$
Ainsi $(J_k)_{k \geq 1}$ est une suite d'intervalles emboîtés.

e) Une suite d'intervalles emboîtés admet un unique point dans l'intersection de tous les intervalles.

f) Soit (u_n) de Cauchy, $(J_k)_{k \geq 1}$ la suite d'intervalles contruits lors de la question (c) et :
$$\{a\} = \cap_{k \geq 1} J_k.$$
Soit $\varepsilon > 0$. Fixons un entier $k \geq 1$ tel que $\frac{1}{k} \leq \varepsilon$. D'après la question (b), si $n \geq \max(N_1, \ldots, N_k)$, alors :
$$u_n \in I_1 \cap \cdots \cap I_k = J_k.$$

Puisque $\ell(J_k) \leq \frac{1}{k}$, on en déduit :

$$|a - u_n| \leq \ell(J_k) \leq \frac{1}{k} < \varepsilon.$$

Donc a est la limite de (u_n).

Exercice 2. Soient a, b réels, $a > 0$, $b > 0$.

(1) Montrer $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

(2) Supposons désormais $b \geq a$. Montrer $a \leq \frac{a+b}{2} \leq b$ et $a \leq \sqrt{ab} \leq b$.

(3) Soit $0 < u_0 < v_0$ et posons :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, \qquad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Montrer que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(4) Montrer que (u_n) est croissante et que (v_n) est décroissante.

(5) Déduire que (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont même limite.

Cette limite est la moyenne arithmético-géométrique. Les curieux chercheront la présentation de Chambert-Loir sur cette moyenne, où apparaissent Gauss, la lemniscate, la cryptographie…

Corrigé 2. Un classique.

(1) On a :

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \Leftarrow 4ab \leq a^2 + b^2 + 2ab \Leftarrow 0 \leq a^2 + b^2 - 2ab \Leftarrow 0 \leq (a-b)^2.$$

(2) On a :

$$a = \frac{a+a}{2} \leq \frac{a+b}{2} \leq \frac{b+b}{2} = b,$$

et :

$$a = \sqrt{a \cdot a} \leq \sqrt{a \cdot b} \leq \sqrt{b \cdot b} = b.$$

(3) Par récurrence : au rang 0 c'est vrai puis on assume $u_n \leq v_n$.Par la question (1) avec $a = u_n \leq v_b = b$:

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \leq \frac{u_n + v_n}{2} = v_{n+1}.$$

(4) Voyons (u_n) croissante. Par la question (2) avec $a = u_n$ et $b = v_n$:

$$u_n \leq \sqrt{u_n v_n} = u_{n+1}.$$

Pour la même raison :

$$v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \leq v_n.$$

(5) (u_n) croissante et majorée (par v_0) donc convergente, disons ver ℓ. (v_n) décroissante et minorée (par u_0) donc convergente, disons ver ℓ'. Alors, en passant à la limite dans la relation de récurrence :

$$\ell' = \frac{\ell + \ell'}{2},$$

donc $\ell = \ell'$.

Exercice 3. Étudier la nature des séries numériques suivantes :

(1) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n,$

(2) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(\ln(n+1)-\ln(n)),$ puis : $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(\sqrt{\ln(n+1)}-\sqrt{\ln(n)}),$

(3) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\ln(1+2^{-n}),$

(4) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{n^3}{n!},$

(5) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}).$

Corrigé 3. Je note u_n le terme général.

(1) La série est positive. On applique Cauchy :

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n+1}=\frac{1}{2}<1,$$

la série est convergente.

(2) La série est positive. On a :

$$\lim_{n\to\infty}nu_n=\lim_{n\to\infty}n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

donc la série est équivalente à la série harmonique $\sum\frac{1}{n}$, divergente.

Soit $\sum v_n$ la deuxième série de l'exercice. Elle est aussi positive. D'après la question précédente on a :

$$v_n\sim\frac{1}{nw_n},\qquad \text{avec :}\qquad w_n=\sqrt{\ln(n+1)}+\sqrt{\ln(n)}\leq 2\sqrt{\ln n}\leq 2\ln n.$$

Alors :

$$w_n\geq\frac{2}{n\ln n},$$

qui est une série (de Bertrand) divergente.

Attention, la série de Bertrand je l'avais donnée en « complément ». Solution facile par série téléscopique :

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\sqrt{\ln(n+1)}-\sqrt{\ln(n)}\right)=\sqrt{\ln(N+1)}-\sqrt{\ln(1)}=\sqrt{\ln(N+1)},$$

ce qui tend vers $+\infty$ lorsque N tend vers ∞. Donc série divergente.

(3) On écrit un développement de $\ln(1+y)$ en 0 :

$$\ln(1+y)=y+o(y^2).$$

Donc :

$$\ln(1+2^{-n})=2^{-n}+o(2^{-2n}).$$

Cette série positive est équivalente à $\sum 2^{-n}$, donc convergente.

(4) La série est positive. On a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3 n!}{n^3(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^3} = 0 < 1,$$

donc la série est convergente.

(5) La série est alternée, puisque $\sqrt{n+1} \geq \sqrt{n}$. Il suffit de voir que (u_n) est décroissante vers 0 pour montrer que $\sum u_n$ est convergente. On a :

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{n+2} + \sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} \leq 0,$$

en effet :

$$\begin{aligned} n+2+n+2\sqrt{(n+2)n} \leq 4(n+1) &\Leftarrow 2\sqrt{(n+2)n} \leq 2(n+1) \\ &\Leftarrow n^2+2n \leq n^2+2n+1 \\ &\Leftarrow 0 \leq 1. \end{aligned}$$

Donc (u_n) est décroissante. (u_n) tend vers 0 car :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0.$$

Exercice 4. Soit (a_n), (b_n) et (c_n) suites numériques avec $a_n \leq b_n \leq c_n$ à partir d'un certain rang. On suppose $\sum a_n$ et $\sum c_n$ convergentes. Démontrer que $\sum b_n$ est convergente aussi.

Corrigé 4. On a :

$$0 \leq b_n - a_n \leq c_n - a_n.$$

Donc la série $\sum(b_n - a_n)$ est positive et dominée par une série positive convergente ; alors elle converge. Ainsi $\sum b_n$ converge comme somme de série convergentes.