Analyse – Math3A

Temps disponible : 2 heures

Documents et calculatrices interdits. Toutes les réponses doivent être justifiées. On pourra admettre la réponse à une question afin de répondre aux questions suivantes.

Exercice 1 (Question de cours)**.** On souhaite montrer que l'intégrale fournit une primitive d'une fonction continue. Soit $a < b$ réels, $I = [a, b]$ et considérons f intégrable au sens de Riemann sur I. Posons $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ pour tout $x \in I$.

1. Soit et $x_0 \in [a, b]$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Donner la définition de « ℓ est limite à gauche de f en x_0 ».
2. Donner la définition de « F dérivable à gauche en x_0 ».
3. Soit ℓ limite à gauche de f en x_0. Montrer que la dérivée à gauche de F en x_0 vaut ℓ.
4. Montrer que, si f est continue sur I, alors F est dérivable sur I et $F' = f$.
5. Soit f somme de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ sur $\mathbb{R}$ et soit $k \in \mathbb{N}$. Trouver toutes les fonctions F telles que $F^{(k)} = f$.

Corrigé 1. Tout est dans le cours sauf la dernière question. Pour répondre à celle-ci on se souvient que f est continue et qu'une primitive G_1 de f est :

$$G_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Toute primitive F_1 de f est de la forme $F_1 = G_1 + a_{-1}$ pour une certaine constante $a_{-1} \in \mathbb{R}$, donc :

$$F_1(x) = a_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

En itérant le raisonnement, on obtient que toute primitive F_k telle que $F_k^{(k)} = f$ est de la forme :

$$F_k(x) = a_{-k} + a_{1-k}x + \cdots + a_{-1}x^{k-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(n+1)\cdots(n+k)} x^{n+k},$$

pour certaines constantes $a_{-k}, \ldots, a_{-1} \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Développer en série entière autour de 0 les fonctions suivantes :

$$f(x) = \ln((x^2 - 6x + 8))(3 - x)); \qquad g(x) = \cos^4(t)dt, \qquad h(x) = \frac{x^7}{x^2 + 2x + 4}.$$

Dire quel est le rayon de convergence des deux développements.

Corrigé 2. Pour la première fonction, on écrit $x^2 - 6x + 8 = (2 - x)(4 - x)$ puis $f(x) = \ln(2 - x) + \ln(3 - x) + \ln(4 - x)$. Pour $a > 0$, on a le développement de rayon a :

$$\ln(a - x) = \ln(a(1 - x/a)) = \ln(a) + \ln(1 - x/a) = \ln(a) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{na^n} x^n.$$

Par conséquent, en écrivant $\ln(24) = \ln(2) + \ln(3) + \ln(4)$ on a le développement de f de rayon $2 = \min(\{2, 3, 4\})$:

$$f(x) = \ln(24) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} \right) x^n.$$

La formule $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ implique $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$ donc :

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{2^{2k}}{(2k)!}x^{2k}\right) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{2^{2k-1}}{(2k)!}x^{2k}.$$

$\cos(4x) = 2\cos^2(2x) - 1 = 2(2\cos(x)^2 - 1)^2 - 1 = 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1$. Ainsi :

$$\cos^4(t) = \frac{1}{8}\left(\cos(4t) - 1\right) + \cos^2(t).$$

Donc :

$$\cos^4(x) = \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{2^{4k}}{(2k)!}x^{2k} + \cos^2(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{2^{2k-1} + 2^{4k-3}}{(2k)!}x^{2k}.$$

Ce développement a rayon infini.

Pour la dernière fonction, on écrit :

$$h(x) = \frac{x^7}{x^2 + 2x + 4} = \frac{x^7(x-2)}{x^3 - 8},$$

Donc on a, pour $|x| < 1$:

$$\begin{aligned} h(x) &= \left(\frac{x^8}{8} - \frac{x^7}{4}\right)\frac{-1}{1 - (x/2)^3} = \\ &= \left(\frac{x^7}{4} - \frac{x^8}{8}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{3n}}x^{3n} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{3n+7}}{2^{3(n+1)-1}} - \frac{x^{3n+8}}{2^{3(n+1)}}\right). \end{aligned}$$

Ce développement a rayon de convergence 1.

Exercice 3. Soit $a \in \mathbb{R}$ et, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 1/n + (-a)^n$. Soit R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

1. Quelles sont les valeurs d'adhérence de (a_n) ? Que peut-on dire de $\lim_{n\to\infty} a_n$?
2. Soit désormais $a > 1$. Justifier que $(a_n) \sim (-a)^n$ puis en déduire la valeur de R.
3. Montrer que, si $|z| = R$, alors $\sum a_n z^n$ diverge.
4. Pour tout x dans $]-R, R[$, exprimer la somme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ en termes de fonctions usuelles.

Corrigé 3. Notons f la somme de la série entière en question.

1. Pour les valeurs d'adhérence, il est nécessaire de procéder par disjonction de cas.
   — Si $|a| > 1$, les valeurs d'adhérence sont $-\infty$ et $+\infty$. Donc (a_n) ne converge pas, même dans la droite achevée.
   — Si $|a| < 1$ alors (a_n) tend vers 0.
   — Si $a = 1$ les valeurs d'adhérence de (a_n) sont 1 et -1.
   — Enfin si $a = -1$, (a_n) tend vers 1.
2. On a :
   $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{(-a)^n} = 1.$$
   Par conséquent, $(a_n z^n)$ est bornée si et seulement si $((-a)^n z^n)$ l'est. Ceci arrive si et seulement si $a|z| \leq 1$, i.e. $|z| \leq 1/a$. Ainsi $R = 1/a$.
3. Si $|z| = 1/a$, $|a_n z^n|$ tend vers 1 et $\sum a_n z^n$ diverge car son terme général ne tend pas vers 0.

4. On développe donc :

$$\ln(1-x) + \frac{ax}{ax+1} = \ln(1-x) + ax\frac{1}{1-(-ax)} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n - \sum_{n=1}^{\infty}(-a)^n x^n$$

Ainsi :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = -\ln(1-x) - \frac{ax}{ax+1}.$$

Exercice 4. Trouver la série entière dont la fonction somme $f(x)$ est solution de :

$$xf''(x) + 2f'(x) = -xf(x), \qquad f(0) = 1.$$

Montrer que f est définie sur tout $\mathbb{R}$ et que $f(\pi/2) = 2/\pi$.

Corrigé 4. On note $\sum a_n x^n$ la série entière à trouver, R sont rayon de convergence, puis on écrit pour $|x| < R$:

$$\begin{aligned} xf''(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)na_{n+1}x^n, \\ 2f'(x) &= 2\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)a_{n+1}x^n, \\ xf(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n. \end{aligned}$$

L'équation différentielle devient l'identité suivante :

$$a_{n+1}(n+1)(n+2) + a_{n-1}a_{n-1} = 0, \qquad \text{pour } n \geq 1, \text{ et } 2a_1 = 0.$$

Autrement dit, pour $n \geq 1$:

$$a_{n+1} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)}a_{n-1}.$$

Aussi $a_0 = f(0) = 1$. L'égalité ci-dessus implique donc pour tout $k \in NN$:

$$\begin{aligned} a_{2k+1} &= 0, \\ a_{2k} &= \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}a_0 = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}. \end{aligned}$$

On voit par d'Alemebert que $R = \infty$ donc f est définie sur tout $\mathbb{R}$. Aussi, on se souvient que :

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}.$$

Enfin on a :

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x},$$

ce qui implique $f(\pi/2) = 2/\pi$.

Exercice 5. Soit n un entier.

1. Quelles sont les racines du polynôme $X^2 + 3nX + 2n^2$?
2. A l'aide d'une somme de Riemann, calculer :

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k^2+3nk+2n^2}.$$

Le polynôme se factorise comme suit : $X^2 + 3nX + 2n^2 = (X+n)(X+2n)$. Les racines sont donc $-n$ et $-2n$. On écrit :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+3nk+2n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{(k+n)(k+2n)} &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{(k+n)(k+2n)} = \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{k+n}{n}\frac{k+2n}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\frac{k}{n}+1\right)\left(\frac{k}{n}+2\right)} = \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k/n).\end{aligned}$$

Avec :

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+3nk+2n^2} &= \int_0^1 f(x)dx = \\ &= \int_0^1 \frac{1}{x+1}dx - \int_0^1 \frac{1}{x+2}dx = \\ &= \ln(x+1)\big|_0^1 - \ln(x+2)\big|_0^1 = 2\ln(2) - \ln(3).\end{aligned}$$