Analyse – Math3A

Temps disponible : 2 heures

Documents et calculatrices interdits. Toutes les réponses doivent être justifiées. On pourra admettre la réponse à une question afin de répondre aux questions suivantes.

Exercice 1. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et notons $I = [a, b]$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application.

1. Définir « f intégrable sur I » puis montrer que « f intégrable » implique « f bornée ».
2. Soit f bornée sur I. Donner les définitions des intégrales inférieure et supérieure de f puis montrer qu'elles sont bien posées.
3. Soit f bornée sur I. Montrer que les intégrales inférieure et supérieure de f coïncident si et seulement si f est intégrable sur I.
4. Dire, en justifiant la réponse, si les fonctions suivantes sont intégrables sur I et dans ce cas en calculer l'intégrale :
   (a) $f(x) = x^2$ si $x \in I \cap \mathbb{Z}$, $f(x) = -x^2$ si $x \in I \setminus \mathbb{Z}$.
   (b) $f(x) = x$ si $x \in I \cap \mathbb{Q}$, $f(x) = -x$ si $x \in I \setminus \mathbb{Q}$.

Corrigé 1. On donne des réponses rapides pour la partie cours.

1. La fonction f est intégrable sur I si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe g, h en escalier sur I telles que $g \leq f \leq h$ et $\int_I h - \int_I g < \varepsilon$. Si f est intégrable, pour voir que f est bornée nous fixons par exemple $\varepsilon = 1$. Il existe alors g, h en escalier sur I avec $g \leq f \leq h$ et $\int_I h - \int_I g < 1$. Soit $\sigma = (x_0 < \cdots < x_n)$ une subdivision de I commune à g et h et soit pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, $m_i \in \mathbb{R}$ et $p_i \in \mathbb{R}$ tels que $g(x) = m_i$ et $h(x) = p_i$ pour $x \in]x_{i-1}, x_i[$. Soit $x \in I$. Si il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $x \in]x_{i-1}, x_i[$ alors $|f(x)| \leq \max\{|p_i|, |m_i| \mid 1 \leq i \leq n\}$. Soit :
$$M = \max_{0 \leq i \leq n} \{|g(x_i)|, |h(x_i)|\}, \qquad N = \max_{1 \leq i \leq n} \{|m_i|, |p_i|\}.$$
   On a donc, pour $x \in I$:
$$|f(x)| \leq \max\{M, N\}.$$
   Donc f est bornée.
2. Soit f bornée sur I. L'intégrale supérieure $I_+(f)$ est la borne inférieure des intégrales des fonction en escalier majorant f. L'intégrale inférieure $I_-(f)$ est la borne supérieure des intégrales des fonction en escalier qui minorent f. Comme f est bornée, il existe bien des fonction en escalier qui minorent et majorent f, donc l'ensemble de ces intégrales est non vide. Aussi, si g, h sont escalier et $g \leq f \leq h$ alors $\int_I g \leq \int_I h$. Donc les bornes supérieure et inférieure que nous venons de mentionner sont bien définies.
3. Soit f intégrable sur I. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors g, h en escalier sur I avec $g \leq f \leq h$ et $\int_I h - \int_I g < \varepsilon$. Alors l'intégrale supérieure $I_+(f)$ et $I_-(f)$ satisfont :
$$0 \leq I_+(f) - I_-(f) \leq \int_I h - \int_I g < \varepsilon.$$
   En faisant tendre ε vers 0, on obtient $I_+(f) = I_-(f)$.

Réciproquement, soit $I_+(f) = I_-(f)$ et fixons $\varepsilon > 0$. Alors, par la minimalité de la borne supérieure parmi les majorants (et par maximalité de la borne inférieure parmi les minorants) il existe g, h en escalier, g minorant f, h majorant f telles que :

$$\int_I g > I_-(f) - \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \int_I h < I_+(f) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc :

$$\int_I h - \int_I g < I_+(f) + \frac{\varepsilon}{2} - I_-(f) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

donc f est intégrable sur I.

4. On se rapporte à la définition d'intégrabilité.

   (a) Pour la fonction $f(x) = x^2$ si $x \in I \cap \mathbb{Z}$, $f(x) = -x^2$ si $x \in I \setminus \mathbb{Z}$, on observe que, bien sûr, la fonction f_0 définie par $f_0(x) = x^2$ est intégrable sur I et que $f = f_0$ sauf sur $I \cap \mathbb{Z}$. Par ailleurs, $I \cap \mathbb{Z}$ est constitué d'un nombre fini de points $\{y_1, \ldots, y_m\}$ avec $y_1 < \cdots < y_m$. Pour toute fonction en escalier g_0, h_0 telles que $g_0 \leq f_0 \leq h_0$, on peut modifier g_0 et h_0 en ajoutant (si nécessaire) les points $y_1, \ldots, y_m$ aux subdivisions de g_0 et h_0 et modifier les valeurs de g_0 et h_0 aux points $y_1, \ldots, y_m$ pour obtenir g, h en escalier telles que $g \leq f \leq h$ et $\int_I h = \int_I h_0$ et $\int_I g = \int_I g_0$. Ainsi, f est aussi intégrable car pour $\varepsilon > 0$ fixé on peut choisir g_0, h_0 comme ci-dessus avec $\int_I h - \int_I g = \int_I h_0 - \int_I g_0 < \varepsilon$.

   (b) Pour la fonction $f(x) = x$ si $x \in I \cap \mathbb{Q}$, $f(x) = -x$ si $x \in I \setminus \mathbb{Q}$, on cherche à montrer la non intégrabilité. Il suffit de voir que f n'est pas intégrable sur $I \cap \mathbb{R}_+$ ou $I \cap \mathbb{R}_-$, l'un de ces deux intervalles (disons le premier) étant d'étendue positive. Autrement dit, on peut supposer désormais $a > 0$.

   On se donne $\varepsilon > 0$ avec $\varepsilon < a(b-a)$ et g, h en escalier pour la subdivision commune $(x_0 < \cdots < x_n)$ de I. Par hypothèse $x_i \geq 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Soit $p_1, \ldots, p_n, m_1, \ldots, m_n$ dans $\mathbb{R}$ tels que $g(x) = p_i$ et $h(x) = m_i$ pour $x \in]x_{i-1}, x_i[$, pour tout i dans $\{1, \ldots, n\}$. Alors, comme $]x_{i-1}, x_i[$ intercepte $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on a :

   $$p_i \leq -x_i, \qquad < x_i \leq m_i.$$

   Ainsi :

   $$\int_I h - \int_I g = \sum_{i=1}^{n} (m_i - p_i)(x_i - x_{i-1}) \geq$$
   $$\geq \sum_{i=1}^{n} 2x_i(x_i - x_{i-1}) >$$
   $$\sum_{i=1}^{n} 2a(x_i - x_{i-1}) = 2a(b-a) > \varepsilon.$$

   Donc f n'est pas intégrable.

Exercice 2. Soit $b, c \in \mathbb{R}_+^*$ et (a_n) une suite de nombres complexes avec $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = b$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes.

a) $\sum_{n\geq 1} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$, b) $\sum_n a_n z^{3n}$, c) $\sum_n (c^n a_n^2) z^n$.

Corrigé 2. On utilise les critères d'Hadamard et de d'Alembert. On note R le rayon de convergence de la série en question.

a) Soit b_n le terme général de la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$. On a $b_n \in \mathbb{R}_+^*$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. calcule :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} &= \lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2(n!)^2}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2(n!)^2}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Donc $R = 4$.

b) Soit c_n le terme général de la série entière en question. On a $c_n \in \mathbb{R}_+^*$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et, pour $n \geq 2$:

$$\frac{c_n}{c_{n-1}} = \frac{(n+2)!}{\prod_{k=1}^{n+1}(2k-1)} \cdot \frac{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}{(n+1)!} = \frac{n+2}{2n+1},$$

Cette expression tend vers $1/2$ donc $R = 2$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} &= \lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2(n!)^2}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2(n!)^2}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Donc $R = 4$.

c) Pour, $\sum_n a_n z^{3n}$ on sait que le rayon de convergence de $\sum_n a_n z^n$ est $1/b$ donc $(a_n z^n)$ est bornée si $|z| < 1/b$ et non bornée si $|z| > 1/b$. Ainsi, $(a_n z^{3n})$ est bornée si $|z^3| < 1/b$ et non bornée si $|z^3| > 1/b$. Ainsi, $R = 1/\sqrt[3]{b}$.

d) Pour $\sum_n (c^n a_n^2) z^n$, on écrit :

$$\lim_{n\to\infty} \left|a_n^2 c^n\right|^{\frac{1}{n}} = cb^2,$$

donc $R = \frac{1}{cb^2}$.

Exercice 3. Soit $f(x) = x^4 + x^2 + 1$.

1. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer l'intégrale $\int_a^b \frac{f'(t)}{f(t)} dt$.
2. Calculer la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2k^3 + n^2 k}{n^4 + n^2 k^2 + k^4}.$$

Corrigé 3. On voit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\ln(f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{4x^3 + 2x}{x^4 + x^2 + 1}.$$

1. Vu le calcul ci-dessus on trouve :
$$\int_a^b \frac{f'(t)}{f(t)}dt = \ln(f(a)) - \ln(f(b)) = \ln(a^4+a^2+1) - \ln(b^4+b^2+1).$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On utilise la formule précédente avec $a = 0 =$ et $b = 1$. On pose, pour $k \in \{0, \dots, n\}$, $x_k = k/n$. Le théorème sur les sommes de Riemann fournit :
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2k^3+n^2k}{n^4+n^2k^2+k^4} &= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n^3\left(4x_k^3+2x_k\right)}{n^4(1+x_k^2+x_k^4)} = \\ &= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{4x_k^3+2x_k}{1+x_k^2+x_k^4} = \\ &= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{f'(x_k)}{f(x_k)} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{f'(t)}{f(t)}dt = \frac{\ln(3)}{2}.\end{aligned}$$

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :
$$f(x) = \frac{x}{x^4+13x^2+36}.$$

1. Déterminer le développement $\sum a_n x^n$ en série entière de f autour de 0.
2. Quel est le rayon R de convergence de $\sum a_n x^n$?
3. Déterminer la nature de $\sum a_n z^n$ pour $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = R$.

Corrigé 4. Le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$. On pose $y = x^2$ donc :
$$x^4+13x^2+36 = y^2+13y+36 = (y+4)(y+9) = (x^2+4)(x^2+9).$$

1. Par décomposition en éléments simples on trouve :
$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{x}{5}\left(\frac{1}{x^2+4} - \frac{1}{x^2+9}\right) = \\ &= \frac{x}{5}\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} - \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}\right) = \\ &= \frac{x}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{x^{2n}}{2^{2n}} - \frac{1}{9}\cdot\frac{x^{2n}}{3^{2n}}\right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5}\left(\frac{1}{2^{2n+2}} - \frac{1}{3^{2n+2}}\right)x^{2n+1}.\end{aligned}$$

2. Les série entières $\sum b_n x^n$ et $\sum c_n x^n$ qui correspondent aux développements de $\frac{x}{x^2+4}$ et $\frac{x}{x^2+9}$ ont rayons $S = 2$ et $T = 3$. En effet, on a $b_n = 0$ pour $n \in \mathbb{N}$ pair tandis que $b_{2k+1} = (-1)^k\frac{1}{2^{2k+2}}$, puis $c_n = 0$ pour $n \in \mathbb{N}$ pair et $c_{2k+1} = (-1)^k\frac{1}{3^{2k+2}}$ pour $k \in \mathbb{N}$. Ainsi, on calcule :
$$\begin{aligned}\frac{1}{S} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{2^{-(2n+2)}} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[\frac{1}{n}]{|b_n|} = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{T} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{3^{-(2n+2)}} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$
Comme $\sum a_n x^n = \frac{1}{5}(\sum(b_n + c_n)x^n)$ et $2 < 3$, on a $R = \min\{2, 3\} = 2$.

3. Si $z \in \mathbb{C}$ et $|z| = 2$ alors $\sum a_n z^n$ est de même nature que $\sum b_n z^n$ car $|z| < 3$ donc $\sum c_n z^n$ converge absolument. Or $\sum b_n z^n$ diverge puisque $|b_n||z|^n = \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ impair donc $(b_n z^n)$ ne tend pas vers 0.

Exercice 5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, (a_n) une suite réelle et $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ définie dans un voisinage ouvert U de 0 et satisfaisant pour tout $x \in U$:

$$(1-x^2)f''(x) - 2xf'(x) + \alpha f(x) = 0, \qquad f(0) = 0, \qquad f'(0) = 1.$$

1. Trouver une relation de récurrence sur (a_n).
2. Supposons $\alpha = (m^2-1)/4$ avec $m \in \mathbb{Z}$. Quel est le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$?
3. Soit $\alpha = 0$. Calculer a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis montrer que, si $|x| < 1$, alors :

$$f(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}\right).$$

Corrigé 5. On a, pour $x \in U$:

$$\begin{aligned} 0 &= (1-x^2)f''(x) - 2xf'(x) + \alpha f(x) = \\ &= (1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \end{aligned}$$

1. Après changement d'indices, on fait apparaître n comme puissance de x, par exemple $n(n-1)x^{n-2}$ devient $(n+2)(n+1)x^n$, où n de la deuxième expression est $n-2$ de la première. On obtient de l'équation ci-dessus, par unicité du développement en série entière de la fonction constante 0 sur U :

$$\begin{aligned} 0 &= (n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2na_n + \alpha a_n, \qquad && \forall n \geq 2, \\ 0 &= 6a_3 + (\alpha-2)a_1, \\ 0 &= 2a_2 + \alpha a_0. \end{aligned}$$

   On obtient :

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= \frac{n^2+n-\alpha}{(n+2)(n+1)} a_n, \qquad && \forall n \geq 2, \\ a_3 &= \frac{2-\alpha}{6} a_1, \\ a_2 &= -\frac{\alpha}{2} a_0. \end{aligned}$$

   De plus on a $a_0 = f(0) = 0$ et $a_1 = f'(0) = 1$. Les relations ci-dessus impliquent donc $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ pair et, pour $n \in \mathbb{N}$ impair :

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= \frac{n^2+n-\alpha}{(n+2)(n+1)} a_n, \qquad && \forall n \geq 3, \\ a_3 &= \frac{2-\alpha}{6}. \end{aligned}$$

2. Soit R le rayon en question. On a $a_n = 0$ pour n pair. Aussi, comme les (a_n) satisfont une relation de récurrence multiplicative, on a (a_n) nulle à partir d'un certain rang, ou alors (a_n) non nul pour tout n impair. Autrement dit, on a $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ impair si et seulement si

$$n^2 + n - \alpha = 0$$

   n'a pas de solution $n \geq 1$ entière impaire. Or comme $\alpha = (m^2-1)/4$ la seule solution entière positive est possible $(|m|-1)/2$. Ainsi, nous avons :

   — si il existe $\ell \in \mathbb{N}$ tel que $|m| = 4\ell + 3$, ce qui s'écrit « $|m|$ est congru à 3 modulo 4 », alors (a_n) est nulle à partir du rang a_{n+2} avec $n = (|m|-1)/2$, donc $R = \infty$;

— sinon, si $|m|$ n'est pas congru à 3 modulo 4, alors $a_n \neq 0$ quel que soit n impair. Si $n = 2k-1$, $k \in \mathbb{N}^*$ et on pose $b_k = a_{2k-1}$ alors $\lim_{k\to\infty} \frac{b_{k+1}}{b_k} = 1$, donc le rayon de $\sum_{k\geq 1} b_k y^k$ vaut 1. Soit $y = x^2$. Comme $\sum a_{2k-1}x^{2k} = \sum b_k y^k$, par le même argument que dans l'exercice 2 on trouve $R = 1$.

3. Soit $\alpha = 0$. On a encore $a_n = 0$ pour n pair puis, comme $\alpha = 0$, on trouve $a_3 = 1/3$ et, pour $n \geq 2$:
$$a_{n+2} = \frac{n}{n+2} a_n.$$
Ainsi $a_n = 0$ pour n pair et $a_n = 1/n$ pour n impair i. e. pour $|x| < 1$:
$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} x^{2k-1}.$$
Or on sait que pour $|x| < 1$:
$$\ln(1+x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n,$$
donc on calcule $\ln(1-x)$ puis $\ln(1+x) - \ln(1-x)$ en obtenant :
$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} x^{2k-1},$$
Conclusion, pour $|x| < 1$ on a :
$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} x^{2k-1} = \frac{1}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{2}\ln(1-x) = \ln\left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}\right).$$