Analyse – Math3A

Temps disponible : 2 heures

Documents et calculatrices interdits. Toutes les réponses doivent être justifiées. On pourra admettre la réponse à une question afin de répondre aux questions suivantes.

Exercice 1 (Question de cours)**.** On souhaite montrer que les fonctions continues sont intégrables au sens de Riemann. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, $I = [a, b]$ et $f : I \to \mathbb{R}$.

1. Soit $\beta > 0$ et supposons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $(x_n, y_n) \in I \times I$ tels que $|x_n - y_n| \leq 1/n$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \beta$. Montrer que f n'est pas continue sur I.
2. En déduire que si f est continue sur I alors f est uniformément continue sur I.
3. Montrer que si f est continue sur I et $\alpha > 0$ alors on peut trouver g, h en escalier sur I par rapport à une subdivision de pas constant, telles que $g \leq f \leq h$ et $h - g < \alpha$.
4. En déduire que si f est continue sur I alors f est intégrable sur I.

Corrigé 1. Réponses rapides.

1. Comme I est compact, Bolzano–Weierstrass fournit une suite extraite (x_{n_k}) de (x_n) qui converge vers un point x de I. De même il existe $(y_{n_{k_j}})$ suite extraite de (y_{n_k}) qui converge vers un point y de I. Ainsi $(x_{n_{k_j}})$ tend vers x. Comme $(|x_n - y_n|)$ tend vers 0, on a $x = y$. Si f était continue en x $f(x)$ serait le point limite de $f(x_{n_{k_j}})$ et $f(y_{n_{k_j}})$, ce qui est impossible car $|f(x_{n_{k_j}}) - f(y_{n_{k_j}})| \geq \beta > 0$. Conclusion f n'est pas continue en x.
2. C'est la contraposée de la question précédente, dans le sens que, pour tout $\beta > 0$ il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que, quel que soit $(x, y) \in I \times I$ avec $|x - y[< 1/n$, on ait $|f(x) - f(y)| < \beta$.
3. Pour tout α fixé, il existe $\delta(\alpha)$ tel que, pour tout $x, y \in I$ avec $|x - y| < \delta(\alpha)$ on ait $|f(x) - f(y)| < \alpha$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note $\gamma(n) = (b - a)/n$, pas constant de la subdivision cherchée.

   On peut choisir n de sorte que $\gamma(n) < \delta(\alpha/2)$. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, soit $x_k = a + k\gamma(n)$. Ainsi, pour $k \in [\![1, n]\!]$ et $x \in [x_{k-1}, x_k]$ on a $|x - x_{k-1}| \leq \gamma(n) < \delta$ donc $|f(x) - f(x_{k-1})| < \alpha/2$, en particulier $f(x) \geq f(x_{k-1}) - \alpha/2$. De même $f(x) \leq f(x_k) + \alpha/2$. On a donc g, h en escalier définies par $g(x) = f(x_{k-1}) - \alpha/2$ et $h(x) = f(x_{k-1}) + \alpha/2$ pour $x \in [x_{k-1}, x_k[$ et $g(b) = h(b) = f(b)$. Pour $x \in I$ on a $x = b$ ou alors $x \in [x_{k-1}, x_k[$ pour un certain $k \in [\![1, n]\!]$. Dans les deux cas on a $g \leq f \leq h$. Aussi, $h - g \leq f(x_{k-1}) + \alpha/2 - (f(x_{k-1}) - \alpha/2) = \alpha$.
4. On a $g \leq f \leq h$ et $h - g \leq \alpha$. Alors $\int_I h - \int_I g = \int_I (h - g) \leq \alpha(b - a)$. Pour $\varepsilon > 0$ donné, on choisit $\alpha > 0$ tel que $\alpha(b - a) < \varepsilon$ et on obtient que f est intégrable sur I.

Exercice 2. Pour tout $n, k \in \mathbb{N}$, avec $k \leq n$, notons $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

1. Utiliser une somme de Riemann pour montrer :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2 + 2kn + n^2} = \frac{1}{2}.$$

2. Utiliser un logarithme et une somme de Riemann pour montrer :

$$\lim_{n\to\infty} \binom{2n}{n}^{\frac{1}{n}} = 4.$$

Corrigé 2. On rappelle que, étant donné un intervalle compact $I = [a, b]$ et un entier $n \in \mathbb{N}^*$ on peut considérer la subdivision régulière $(x_0, \ldots, x_n)$ définie pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ par $x_k = a + k\delta(n)$ où $\delta(n) = (b-a)/n$. Si f est intégrable sur I alors on a :

$$\int_I f = \lim_{n\to\infty} S_n, \qquad \text{où :} \qquad S_n = \delta(n)\sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

1. Ici on pose $f(x) = 1/x^2$, $a = 1$, $b = 2$ de sorte que $\delta(n) = 1/n$, $x_k = 1 + n/k$ et :

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+k/n)^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{n^2+2nk+k^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+2nk+k^2}.$$

   Ainsi, comme f est continue donc intégrable sur $[1, 2]$, la limite cherchée vaut :

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+2nk+k^2} = \int_1^2 \frac{1}{t^2}dt = \frac{(-1)}{t}\Big|_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$$

2. On calcule :

$$\begin{aligned}
\ln\left(\binom{2n}{n}^{\frac{1}{n}}\right) &= \ln\left(\left(\frac{(2n)!}{n!n!}\right)^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{\prod_{k=1}^{2n} k}{\prod_{k=1}^{n} k\prod_{k=1}^{n} k}\right) = \\
&= \frac{1}{n}\left(\ln\left(\prod_{k=1}^{2n} k\right) - 2\ln\left(\prod_{k=1}^{n} k\right)\right) = \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{2n}\ln(k) - 2\sum_{k=1}^{n}\ln(k)\right) = \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=n+1}^{2n}\ln(k) - \sum_{k=1}^{n}\ln(k)\right) = \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\ln(n+k) - \sum_{k=1}^{n}\ln(k)\right) = \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{n}{k}\right).
\end{aligned}$$

   Soit $a \in]0, 1]$, $b = 1$, $f(x) = \ln(1 + 1/x)$ pour $x \in I = [a, 1]$, de sorte que f est continue donc intégrable sur I. Pour trouver une primitive de f, on commence par remarquer que :

$$(x\ln(1+1/x))' = \ln(1+1/x) - \frac{1}{x+1}.$$

   Donc, soit $F : I \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = x\ln(1 + 1/x) + \ln(x + 1)$. On voit que F est indéfiniment dérivable sur I et que pour tout $x \in I$ on a :

$$F'(x) = f(x).$$

   Par conséquent on trouve :

$$\int_a^1 f(t)dt = F(x)\Big|_a^1 = 2\ln(2) - a\ln(1+a) - \frac{1}{a+1}.$$

   Ainsi :

$$\int_0^1 f(t)dt = \lim_{a\to 0}\left(2\ln(2) - a\ln(1+1/a) - \ln(a+1)\right) = 2\ln(2).$$

En conclusion on a :

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(\binom{2n}{n}^{\frac{1}{n}}\right) = \int_0^1 f(t)dt = F(x)\Big|_0^1 = 2\ln(2).$$

Ainsi, comme l'exponentielle est continue, on trouve :

$$\lim_{n\to\infty} \binom{2n}{n}^{\frac{1}{n}} = e^{2\ln(2)} = 4.$$

Exercice 3. Trouver $y = y(x)$, solution pour tout $x \in [0,1[$ de :

$$x^2(1-x)y''(x) - x(x+1)y'(x) + y(x) = 0, \qquad y'(0) = 2.$$

Corrigé 3. On cherche $y(x)$ somme de la série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence 1. Une telle solution est indéfiniment dérivable sur $]-1,1[$ et satisfait $a_1 = 2$ et :

$$(1) \qquad \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}x^2(1-x) - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}x(x+1) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

On regroupe les termes en x^n, quitte à translater les indices, ce qui donne pour $n \geq 3$:

$$n(n-1)a_n - (n-1)(n-2)a_{n-1} - na_n - (n-1)a_{n-1} + a_n = 0.$$

Ceci donne :

$$(n-1)^2 a_n - a_{n-1}(n-1)(n-2+1) = 0,$$

donc $a_n = a_{n-1}$ pour tout $n \geq 3$. Du coefficient de x^2 on obtient de (1) :

$$2a_2 - a_1 - 2a_2 + a_2 = 0,$$

donc $a_2 = a_1$. Le coefficient de x de donne aucune condition par (1). Le coefficient constant de (1) donne $a_0 = 0$. En définitive $a_n = 2$ pour tout $n \geq 1$ tandis que $a_0 = 0$. On a alors :

$$y(x) = 2x\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{2x}{1-x}.$$

La série entière que nous venons de trouver a bien rayon de convergence 1.

Exercice 4. Soit S le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 3} b_n z^n$. Calculer le rayon R de convergence des séries entières suivantes.

a) $\sum_{n\geq 1} b_n z^{3n}$, b) $\sum_{n\geq 1} \frac{n+2}{n+1} z^n$, c) $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \ln(1+\frac{n-1}{n^2}) z^n$.

Calculer la somme de la série b) en z avec $|z| < R$. Dire si la série c) converge en $z = 1$.

Corrigé 4. On note $\sum a_n z^n$ la série entière en question. Par définition, $S = \infty$ si $(b_n z^n)$ est bornée pour tout $z \in \mathbb{C}$, tandis que si $S \in \mathbb{R}$ alors :

$$S = \sup\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (b_n r^n) \text{ est bornée}\}.$$

a) La série entière $\sum_{n\geq 1} a_n z^n$ satisfait $a_n = 0$ si $n \in 1 + 3\mathbb{N}$ ou $n \in 2 + 3\mathbb{N}$, et $a_{3n} = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, $(a_n z^n)$ et bornée ssi $(b_n z^{3n})$ est bornée.

Si $S = \infty$ alors $(b_n z_n)$ n'est bornée pour aucun $z \in \mathbb{C}$, donc $(b_n z^{3n})$ non plus, car pour $|z| \geq 1$ on a $|b_n||z|^{3n} \geq |b_n||z|^n$. Ainsi $R = \infty$ dans ce cas.

Sinon, soit $S \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$. Posons $r = |z|$ et $s = r^3$. Si $s < S$ alors $(b_n s^n)$ est bornée donc $(b_n r^{3n})$ aussi, donc $r \leq R$. Autrement dit, $r^3 = s \leq S$ implique $r \leq R$, ce qui veut dire que $S^{1/3} \leq R$. De même on montre que $r < R$ implique $r^3 = s \leq S$, donc $R \leq S^{1/3}$. Conclusion, $R^3 = S$ i.e. $R = S^{1/3}$.

b) Le critère de d'Alembert implique directement que $R = 1$ car :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)(n+1)}{(n+2)^2} = 1.$$

Pour calculer la somme de cette série, on écrit :

$$\frac{n+2}{n+1} z^n = z^n + \frac{1}{n+1} z^n.$$

Ainsi, omme $\sum z^n$ a aussi rayon de convergence 1, on trouve pour $|z| < 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n+1} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} z^n =$$
$$= \frac{z}{1-z} - \frac{\log(1-z)}{z} - 1,$$

où on prolonge en 0 la fonction $\log(1-z)/z$ à la valeur $-1 = \lim_{z\to 0} \log(1-z)/z$.

c) On a $\ln(1+x)$ équivalent à x dans un voisinage de 0. Le critère de d'Alembert donne :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{n}{(n+1)^2}\right)}{\ln\left(1 + \frac{n-1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{(n+1)^2} \frac{n^2}{n-1} \right) = 1,$$

donc $R = 1$. Ainsi, le point $z = 1$ se trouve sur le cercle de convergence. On vérifie que la série converge en 1 par le critère de convergence des séries alternées. On écrit donc la série en question comme $\sum (-1)^n u_n$ avec :

$$u_n = \ln\left(1 + \frac{n-1}{n^2}\right).$$

Cette série converge si (u_n) est positive et décroissante vers 0 à partir d'un certain rang. Il suffit donc de voir que $x \mapsto f(x) = (x-1)/x^2$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$, est positive et décroissante sur $]x_0, +\infty[$, pour un certain $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et que f a limite 1 lorsque x tend vers $+\infty$. Or $f'(x) = (2-x)/x^3$ donc en prenant $x_0 = 2$ on a les propriétés cherchées.

Exercice 5 (Nombre d'or et suite de Fibonacci)**.** Soit $f(z) = z/(1 - z - z^2)$.

1. Montrer que f est développable autour de 0 en une série entière $\sum a_n z^n$ dont on calculera le rayon de convergence R.
2. Justifier que, si $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < R$, alors :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z(z + z^2)^n.$$

3. Démontrer que $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0$ pour tout $n \geq 2$.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$a_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

5. Calculer la limite de a_n/a_{n-1} lorsque n tend vers l'infini.

Corrigé 5. Le nombre d'or $\phi = (1+\sqrt{5})/2$. Soit $\psi = (1-\sqrt{5})/2$, donc $|\psi| = -\psi = (\sqrt{5}-1)/2$.

1. On a $z^2+z-1=(z+\phi)(z+\psi)$. Ainsi, il existe $a,b\in\mathbb{R}^*$ tels que :
$$f(z)=\frac{z}{1-z-z^2}=\frac{a}{z+\phi}+\frac{b}{z+\psi}.$$
Comme $1/(z+\phi)$ et $1/(z+\psi)$ sont développables en série entière autout de zéro, avec des rayons de convergence ϕ et $|\psi|$ et puisque $|\psi|<\phi$ on a que f est développable en série entière autour de 0, avec rayon de convergence $R=|\psi|=\min(|\phi|,|\psi|)$. On calcule :
$$a=-\frac{\sqrt{5}}{10}(1+\sqrt{5})=-\frac{\sqrt{5}}{5}\phi,\qquad b=\frac{\sqrt{5}}{10}(1-\sqrt{5})=\frac{\sqrt{5}}{5}\psi.$$
2. Soit $r=|z|$ et $r<|\psi|$. Rappelons que le rayon de convergence R vaut $|\psi|=-\psi$. Supposons $|z|<|\psi|$. Notons $w=z^2+z$. On a :
$$|w|=|z^2+z|\leq|z|^2+|z|=r^2+r<1,$$
puisque $x^2+x-1<0$ pour tout $\psi<x<\phi$, donc pour $x=r$ car $0\leq r\leq|\psi|<\phi$. Ainsi :
$$\frac{1}{1-z-z^2}=\frac{1}{1-w}=\sum_{n=0}^{\infty}w^n=\sum_{n=0}^{\infty}(z+z^2)^n.$$
Par conséquent, pour $|z|<R$ on a :
$$f(z)=\frac{z}{1-z-z^2}=z\sum_{n=0}^{\infty}(z+z^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}z(z+z^2)^n.$$
3. On a directement par l'expression précédente $a_0=0$ et $a_1=1$. Aussi, on a $f(z)(z^2+z-1)=-z$ dès lors que $|z|<R$, ainsi $f(z)=z^2f(z)+zf(z)+z$. Ceci entraine :
$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^{n+2}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^{n+1}+z,$$
ce qui, par unicité de l'expression en série entière et quitte à translater les indices, fournit la relation $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ pour tout $n\geq 2$.
4. On calcule :
$$\frac{1}{z+\phi}=\frac{1}{\phi}\frac{1}{\left(1-(-\frac{z}{\phi})^n\right)}=\frac{1}{\phi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\phi^n}z^n.$$
De même on trouve :
$$\frac{1}{z+\psi}=\frac{1}{\psi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\psi^n}z^n.$$
D'après l'expression de a et b, on trouve :
$$f(z)=\frac{\sqrt{5}}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(-\frac{1}{\phi^n}+\frac{1}{\psi^n}\right)z^n.$$
Ainsi, pour $n\in\mathbb{N}$, on trouve la formule cherchée, a savoir :
$$a_n=\frac{\sqrt{5}}{5}(-1)^n\left(-\frac{1}{\phi^n}+\frac{1}{\psi^n}\right)=\frac{\sqrt{5}}{5}(-1)^n\left(\frac{\phi^n-\psi^n}{\phi^n\psi^n}\right)=\frac{\sqrt{5}}{5}(\phi^n-\psi^n),$$
car $\phi\psi=-1$, donc $\phi^n\psi^n=(-1)^n$.
5. Comme $|\psi|<1$, on a $\lim_{n\to\infty}\psi^n=0$, donc la formule précédente donne :
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\phi^n}{\phi^{n-1}}=\phi.$$