Analyse – Math31

Temps disponible : 2 heures

Documents et calculatrices interdits. Toutes les réponses doivent être justifiées. On pourra admettre la réponse à une question afin de répondre aux autres questions.

Exercice 1 (Question de cours)**.** Soit $S = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et soit f la fonction somme de S définie dans le disque $D = \{z \in \mathbb{C} | |z| < R\}$.

a) Définir la série entière dérivée de S puis montrer que son rayon de convergence est R.

b) Définir la dérivée $f'(z_0)$ de la fonction f en un point $z_0 \in D$.

c) Montrer que la somme de la série dérivée en z_0 vaut $f'(z_0)$.

d) En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(0)$ existe et vaut $k!a_k$.

e) Pour $p \in \mathbb{N}$, dire quel est le rayon de convergence de $\sum \frac{1}{n^p} z^n$.

Corrigé 1. Les réponses se trouvent dans le polycopié de cours. La dernières question donne rayon de convergence 1 comme on voit en prenant p dérivées successives et en utilisant la série géométrique.

Exercice 2. Calculer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n+i)((n-1)+i)} z^n, \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}, \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{n^n}{n!} z^{5n}, \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{n^a+1}{b^n} z^n,$$

où i est l'unité imaginaire, $a, b \in]0, +\infty[$. Calculer la somme de la première série.

Soit $f(x)$ la fonction somme de la deuxième série.

1. Dire si f est définie en 1 et en -1.
2. Dire si f est continue en -1.

Corrigé 2. Nous notons a_n le coefficient de la série entière de sorte que $S = \sum a_n z^n$.

La *première série* satisfait $|a_n| \sim 1/n^2$ donc son rayon de convergence vaut 1 par comparaison avec la série de Riemann. Pour en calculer la somme lorsque $|z| < 1$, on écrit :

$$\frac{1}{(n+i)((n-1)+i)} = -\frac{1}{n+i} + \frac{1}{n-1+i},$$

donc, si on note $f(z)$ la somme de la série, on a :

$$f(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+i} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-1+i} z^n$$

On calcule alors la somme partielle :

$$\begin{aligned} s_N &= -\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+i} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n-1+i} \\ &= -\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+i} + \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{m+i} = \frac{1}{i} - \frac{1}{N+i} = -i - \frac{1}{N+i}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} s_N(z) = -i + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{N+i} z^N = -i.$$

La *deuxième série* a rayon de convergence 1, par comparaison directe avec la série de Riemann. Elle ne converge pas en 1, pour la même raison. Elle converge en -1 par le critère concernant les séries alternées. Pour étudier la continuité de f en -1, considérons la suite de fonctions $g_n(x) = \sum_{k\geq 1}^{n} x^k/\sqrt{k}$. Chaque fonction g_n est continue sur $[-1,0]$ et la limite $\lim_{n\to\infty} g_n(x)$ est définie pour tout $x \in [-1,0]$ d'après le critère sur les séries alterneés. Ainsi, $f(x)$ est continue sur $[-1,0]$ si (g_n) converge uniformément vers f sur $[-1,0]$. Pour montrer que c'est le cas, on écrit :

$$\|f - g_n\|_\infty = \sup_{x\in[-1,0]} |f(x) - g_n(x)| = \sup_{x\in[-1,0]} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{\sqrt{k}} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{\sqrt{n+1}},$$

ce qui tend vers 0 pour n qui tend vers ∞. Ainsi, (g_n) est uniformément convergente sur $[-1,0]$ et f est continue en -1.

La *troisième série* peut être étudiée en posant $g_n(z) = \frac{n^n}{n!} z^{5n}$ puis en calculant :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|g_{n+1}(z)|}{|g_n(z)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1} n!}{n^n (n+1)!} \frac{|z|^{5n+5}}{|z|^5} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} |z|^5 = e|z|^5.$$

Ainsi, cette limite est inférieure à 1 ssi $|z|^5 < 1/e$, i.e. ssi $|z| < e^{-1/5}$. Autrement dit, le rayon de convergence vaut $e^{-1/5}$.

La *quatrième série* donne un rayon de convergence R satisfaisant $R = bR_0$, où R_0 est le rayon de convergence de $\sum (n^a + 1) z^n$. Concernant R_0, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^a + 1}{n^a + 1} = 1.$$

Donc $R_0 = 1$ et $R = b$.

Exercice 3. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \lfloor \frac{1}{x} \rfloor^{-1} & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est monotone ; en déduire que f est intégrable sur $[0,1]$.
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer l'intégrale $\int_{1/(k+1)}^{1/k} f(x)dx$.
3. En utilisant la décomposition

$$\frac{1}{k^2(k+1)} = \frac{1}{k^2} - \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right), \quad k \in \mathbb{N}^*,$$

   vérifier l'égalité $\int_0^1 f(x)dx = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Corrigé 3. Le symbole $\lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ indique la partie entière de x.

1. On a $x \mapsto 1/x$ décroissante, donc $\lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ décroissante et $f(x)$ croissante. Aussi, f est bornée car $0 \leq f(x) \leq 1$ pour tout $x \in [0,1]$. Toute fonction monotone et bornée sur un intervalle compact y est intégrable selon Riemann donc f est intégrable.
2. Pour $x \in]1/(k+1), 1/k]$ on a $1/x \in [k, k+1[$ donc $\lfloor \frac{1}{x} \rfloor = k$ et $f(x) = 1/k$. Ainsi :

$$\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} f(x)dx = \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} \frac{1}{k} dx = \frac{1}{k}\Big|_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{k^2(k+1)}.$$

3. On trouve, en utilisant la décomposition donnée et la question précédente :

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right),$$

Ensuite par somme téléscopique des deux derniers termes ci-dessus on trouve :

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - 1 = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Exercice 4. Considérons la série entière $S = \sum_{n\geq 0} x^{2n}/(2n)!$.

1. Montrer que la fonction somme $f(x)$ de la série S est définie sur tout $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $f(x) + f'(x) = e^x$.
3. Déterminer explicitement $f(x)$ en résolvant l'équation différentielle ci-dessus.

Corrigé 4. On montre que le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} x^n/(2n)!$ est ∞ par le critère de d'Alembert, puis en remplaçant x par x^2 le rayon de convergence reste infini. Ainsi f est définie sur $\mathbb{R}$. On voit par dérivation que $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$. Or f et f' couvrent les parties paires et impaires du développement de e^x, donc $f(x)+f'(x) = e^x$. On trouve la solution particulière $y = 1/2e^x$ de l'équation différentielle $y' + y = e^x$ et la solution générale $a(e^-x)$ de l'équation homogène $y' + y = 0$. Donc la solution cherchée est de la forme $ae^{-x} + 1/2e^x$. On trouve par $f(0) = 1$ que $a = 1/2$ donc :

$$f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

Exercice 5. Soit $f(x)$ la somme de la série $S = \sum_{n\geq 0}(-1)^n x^{2n}/(4n^2 - 1)$.

1. Montrer que S a rayon de convergence 1.
2. Soit $0 \neq x \in]-1, 1[$. En admettant $\arctan'(x) = 1/(1 + x^2)$ montrer :

$$f(x) = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{x^2+1}{x} \arctan x\right).$$

Qu'arrive-t-il si $x = -1$, $x = 1$ ou $x = 0$?

Corrigé 5. On voit que le rayon de convergence de $\sum x^n/(4n^2 - 1)$ est 1 par application du critère de Cauchy. Ainsi, en remplaçant x par x^2 on obtient aussi rayon de convergence 1.

On sait $\arctan'(x) = 1/(1 + x^2)$ et $1/(1 - x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ pour $|x| < 1$ donc $1/(1 + x^2) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$. Ainsi, du moment que $\arctan(0) = 0$, en passant par la primitive de la dernière série on trouve :

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

Pour f on trouve d'abord la décomposition suivante :

$$\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

puis la somme partielle :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{4k^2-1} x^{2k} &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{(-1)^k}{2k-1}x^{2k} - \frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-1 - x\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}x^{2k-1} - \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1} - \frac{1}{x}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-1 - x\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1} - \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1} - \frac{1}{x}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}\right).
\end{aligned}$$

En passant à la limite pour $n \to \infty$ on obtient :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(-1 + \left(-x - \frac{1}{x}\right)\arctan(x)\right).$$

Concernant les valeurs spéciales de x. Pour $x = 0$, cette valeur se trouvant à l'intérieur du disque de convergence on sait que $f(x)$ est continue en 0. On a $f(0) = -1$. Pour $x = -1$ on aura le même comportement que pour $x = 1$ par parité de f. La série S évaluée en $x = 1$ est convergente, ce que l'on voit par le critère sur les séries alternées. Par ailleurs on définit :

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{4k^2 - 1} x^{2k}.$$

On a alors, sur $I = [1/2, 1]$:

$$\|f - g_n\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x) - g_n(x)| = \sup_{x \in I} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2 - 1} x^{2k} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2 - 1},$$

ce qui est tend vers 0 lorsque n tend vers ∞ car la série $\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{4k^2-1}$ est convergente. De cette façon on a convergence uniforme de (g_n) vers f sur I donc f est continue en 1. On calcule $f(-1) = f(1) = -\pi/4 - 1/2$.