Analyse – Math31

Temps disponible : 2 heures

Documents et calculatrices interdits. Toutes les réponses doivent être justifiées. On pourra admettre la réponse à une question afin de répondre aux autres questions.

Exercice 1 (Question de cours)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application.

a) Définir ce qu'on entend par f « uniformément continue » sur I.

b) Énoncer le théorème de Heine sur la continuité uniforme.

c) Démontrer le théorème de Heine.

d) Donner un exemple de f continue, pas uniformément continue sur $I =]0, 1[$.

e) Donner un exemple de f uniformément continue et strictement monotone sur $[0, +\infty[$.

Corrigé 1. Réponses rapides.

a) On dit que f est uniformément continue sur I si $\forall \varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que, si $x, y \in I$ satisfont $|x - y| < \delta$, alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

b) Le théorème de Heine stipule que, si I est compact et f est continue sur I, alors f est uniformément continue sur I.

c) Supposons que f soit continue mais pas uniformément continue sur I compact et cherchons une contradiction. On a alors, pour $n \in \mathbb{N}$, $x_n, y_n \in I$ tels que :

$$|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}, \qquad \text{et} \qquad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Par Bolzano-Weierstrass, on peut choisir (x_{n_k}) suite extraite convergente de (x_n), on note a sa limite. On prend ensuite $(y_{n_{k_j}})$ suite extraite de (y_{n_k}) convergente vers une limite b. Facilement $a = b$ car $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}$. Mais par continuité de f on devrait avoir $f(a) = f(b)$ alors que $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ implique par passage à la limite $|f(a) - f(b)| \geq \varepsilon > 0$.

d) On peut choisir $f(x) = 1/x$. Fixons $\varepsilon = 1/2$ et montrons qu'aucun δ ne convient. En effet, un tel $\delta > 0$ étant fixé, on prendra $y = \delta/2$ et $x = \delta/4$ donc $x, y \in]0, 1[$ et $|x - y| = \delta/2 < \delta$. Pourtant $|f(x) - f(y)| = 4/\delta - 2/\delta = 1/y > 1/2 = \varepsilon$ car $y < 2$.

e) On peut choisir $f(x) = x$. Pour $\varepsilon > 0$ fixé il suffit de choisir $\delta = \varepsilon$.

Exercice 2. Calculer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+2)} z^n, \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n, \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{n^2} z^n, \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{a^n}{1+b^n} z^n,$$

pour $a, b \in]0, +\infty[$. Calculer la somme de la première série.

Corrigé 2. On note f la somme de la série et R son rayon de convergence.

1. Par application de la règle d'Hadamard on trouve :

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)(n+1)}{n(n+2)} = 1,$$

donc $R = 1$. On trouve :

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\frac{1}{n+2}.$$

Rappelons que, si $z \in \mathbb{C}$ et $|z| < 1$:

$$-\ln(1-z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n.$$

On obtient aussi :

$$z^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2} z^n = -\ln(1-z) - z - \frac{1}{2} z^2,$$

donc pour $|z| < 1$:

$$\begin{aligned} z^2 f(z) = z^2 \left(\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2} z^n \right) = \\ = -\frac{1}{2} z^2 \ln(1-z) + \frac{1}{2} (\ln(1-z) + z + \frac{1}{2} z^2). \end{aligned}$$

Comme la série $\sum z^n/(n(n+2)$ converge pour tout $|z| <$, on peut en déduire :

$$f(z) = -\frac{1}{2} \ln(1-z) + \frac{1}{2} (\ln(1-z) + z)/z^2 + \frac{1}{4}.$$

2. Utilisons la règle de d'Alembert :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2} \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^2 (n!)^2} \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \\ = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{n^2 + +2n + 1} = 4, \end{aligned}$$

donc $R = 1/4$.

3. Montrons que $R = 1$. Si $|z| < 1$, alors :

$$\left| \frac{\sin(n)}{n^2} \right| |z|^n \leq \frac{1}{n^2} |z|^n \leq \frac{1}{n^2};$$

Cette suite est bornée donc la série congerge. Ainsi $R \geq 1$.

Pour $|z| > 1$, on sait que $((1/n^2)z^n)$ n'est pas bornée car $\sum (1/n^2) z^n$ a rayon de convergence égal à 1. De plus, $(\sin(n))$ ne tend pas vers 0. Ainsi

$$\left(\frac{\sin(n)}{n^2} z^n \right)$$

ne tend pas vers 0 non plus. Donc la série diverge. Ainsi $R \leq 1$ donc finalement $R = 1$.

4. Rappelons que $a, b \in]0, +\infty[$. Calculons :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{1+b^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{\sqrt[n]{1+b^n}} = \begin{cases} \frac{a}{b} & \text{si } b \geq 1, \\ a & \text{si } b \leq 1. \end{cases}$$

Donc $R = b/a$ si $b \geq 1$ et $R = 1/a$ si $b \leq 1$.

Exercice 3. En utilisant des sommes de Riemann, calculer la limite lorsque n tend vers l'infini de la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+n}}.$$

Corrigé 3. On utilise la fonction continue $f(x) = 1/\sqrt{1+x}$ sur l'intervalle $I = [0, 1]$ avec la subdivision $(x_0, \ldots, x_n)$ définie par $x_k = k/n$. On a donc :

$$f(x_k) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k}{n}}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{k+n}},$$

et bien entendu $x_k - x_{k-1} = k/n$. On obtient donc :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{k+n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+n}}.$$

On calcule l'intégrale :

$$\int_0^1 f(t)dt = 2\sqrt{1+x}\Big|_0^1 = 2(\sqrt{2}-1).$$

On déduit :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}) = \int_0^1 f(t)dt = 2(\sqrt{2}-1).$$

Exercice 4. On admet $\arctan(x)' = 1/(1+x^2)$ et $\ln(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n$ si $|z|<1$.

1. Donner le développement en série entière de $\arctan(x)$ et son rayon r.
2. Soit $F(z) = \frac{i}{2}(\ln(1-iz) - \ln(1+iz))$. Donner le développement en série entière de F autour de 0 et vérifier que $F(x) = \arctan(x)$ si $x \in [-r, r]$.
3. Trouver $z_0 \in \mathbb{C}$ avec $|z_0| = r$ tel que $\lim_{z\to z_0} |F(z)| = +\infty$.

Considérons la fonction de variable réelle f, définie pour $x \in]-r, r[$ par :

$$f(x) = \frac{\arctan x}{1+x^2}.$$

4. Justifier que f est développable en série entière par une série $\sum a_n x^n$ sur $]-1,1[$.
5. En raisonnant sur la parité de f, montrer que $a_{2k} = 0$ pour tout $k \geq 0$.
6. Calculer $f'(x)$ puis montrer que

$$(1+x^2)f'(x) + 2xf(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

7. En déduire une relation de récurrence sur (a_{2k+1}) puis la formule :

$$a_{2k+1} = (-1)^k \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2i+1}.$$

8. Retrouver la formule de la question précédente en exprimant f comme produit de Cauchy de deux séries entières.

Corrigé 4. On a admis $\arctan(x)' = 1/(1+x^2)$.

1. On sait que, si $|x| < 1$:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Ainsi pour $|x| < 1$:

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Donc en utilisant $\arctan(x)' = 1/(1+x^2)$ et $\arctan(0) = 0$ on trouve :

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

On voit par la règle de d'Alembert que ce développeement a rayon $r = 1$.

2. On sait que, si $|z| < 1$:

$$\ln(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n.$$

Donc, pour $|z| < 1$:

$$\ln(1-iz) = -i\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} z^{2n}.$$

De même :

$$\ln(1+iz) = i\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} z^{2n}.$$

Ainsi toujours pour $|z| < 1$:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1}.$$

Donc $F(x) = \arctan(x)$ pour $x \in]-1, 1[$.

Pour $x = \pm 1$, cette série reste convergente d'après le critère des séries alternées, en effet si on remplace $z = \pm 1$ dans l'expression ci-dessus on obtient, au signe près, une série de terme général $(-1)^n \frac{1}{2n+1}$ et $(\frac{1}{2n+1})$ décroit vers 0. Ainsi :

$$F(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \arctan(1) = \frac{\pi}{4},$$
$$F(-1) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = -\arctan(1) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

3. On voit que :

$$\lim_{z \to i} F(z) = \frac{i}{2} \ln(2) + \lim_{z \to i} \ln(1 + iz) = \infty.$$

4. Si $|x| < 1$, les deux développements de $\arctan(x)$ et de sa dérivée $1/(1 + x^2)$ ont rayon de convergence 1 donc leur produit f a rayon de convergence au moins 1.
5. On a $f(-x) = \arctan(-x)/(1 + x^2) = -f(x)$, i.e. f est impaire. De ce fait, les développements de $f(x)$ et de $f(-x)$ satisfont :

$$a_n x^n = -a_n(-x)^n = (-1)^{n+1} a_n x^n,$$

donc pour tout $k \in \mathbb{N}$ on obtient $a_{2k} = -a_{2k}$ i.e. $a_{2k} = 0$.
6. On calcule $f'(x)$ et on trouve :

$$f'(x) = \frac{1 - 2x \arctan(x)}{(1 + x^2)^2},$$

donc :

$$(1 + x^2) f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} - 2x f(x),$$

et la relation cherchée en découle aussitôt.
7. On prend les développements en série entière des fonctions ci-dessus, tous valables pour $|x| < 1$ et on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(n a_n x^{n-1} (1 + x^2) + 2x a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Hormis le terme $(-1)^n x^{2n}$, les puissances n-ièmes de x deviennent $(n+1)a_{n+1}x^n$ puis $(n-1)a_{n-1}x^n$ puis $-2a_{n-1}x^n$. Ceci entraîne, pour n impair donc $n = 2k+1$ et $k > 0$:

$$(2k + 1)a_{2k+1} + (2k - 1)a_{2k-1} + 2a_{2k-1} = (-1)^k$$

pour n pair donc $n = 2k$ et $k \geq 0$:

$$(2k + 2)a_{2k+2} + 2k a_{2k} 2a_{2k} = -(-1)^k.$$

Nous savons que $a_{2k} = 0$ donc la deuxième relation ne nous intéresse pas. On a $a_1 = f'(0) = 1$. La première relation devient pour $k \geq 1$:

$$(2k + 1)(a_{2k+1} + a_{2k-1}) = (-1)^k.$$

Donc :

$$a_{2k+1} = -a_{2k-1} + \frac{(-1)^k}{2k + 1}.$$

Ceci donne :

$$\begin{aligned} a_{2k+1} &= -a_{2k-1} + \frac{(-1)^k}{2k+1} = a_{2k-3} + \frac{(-1)^k}{2k+1} - \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \\ &= \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^{k-j}(-1)^j}{2k+1-2j} = (-1)^k \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2i+1}. \end{aligned}$$

8. Le produit de Cauchy (ou de convolution) de $\sum b_n x^n$ et $\sum c_n x^n$ s'écrit $\sum d_n x^n$ où :

$$d_n = \sum_{j+k=n} b_j c_k.$$

Ici, $b_{2j+1} = 0$ tandis que $b_{2j} = (-1)^j$ et $c_{2i} = 0$ alors que $c_{2i+1} = \frac{(-1)^i}{2i+1}$ car $\sum b_n x^n$ est de développement de $1/(1+x^2)$ et $\sum c_n z^n$ celui $\arctan x$. Donc :

$$a_n = \sum_{2j+2i+1=n} (-1)^j \frac{(-1)^i}{2i+1}.$$

Ceci montre que $a_n = 0$ si n est pair (car $2j + 2i + 1$ ne peut être pair) et que si $n = 2m+1$ alors :

$$\begin{aligned} a_{2m+1} &= \sum_{2j+2i+1=2m+1} (-1)^j \frac{(-1)^i}{2i+1} = \sum_{j+i=m} (-1)^j \frac{(-1)^i}{2i+1} = \\ &= \sum_{j+i=m} \frac{(-1)^{j+i}}{2i+1} = \sum_{j+i=m} (-1)^m \frac{1}{2i+1} = (-1)^m \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{2i+1}. \end{aligned}$$