# Analyse – Math31

Temps disponible : 2 heures

**Exercice 1.** Soit $a < b$ réels, $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable avec $\varphi'$ continue, $f : \varphi([a,b]) \to \mathbb{R}$ continue.

(1) Montrer que $\varphi([a,b])$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$.

(2) Montrer qu'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $\varphi(x_0) = \max\{\varphi(x) \mid x \in [a,b]\}$.

(3) En déduire que $\varphi([a,b]) = [c,d]$ pour certains $c, d \in \mathbb{R}$, puis que $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt$ est bien défini.

Posons $H(y) = \int_{\varphi(a)}^{y} f(t)dt$ et $G(x) = \int_a^x f(\varphi(s))\varphi'(s)ds$, pour tout $x \in [a,b]$ et $y \in [c,d]$.

(4) Montrer que $G$ et $H$ sont dérivables puis calculer $G'$ et $(H \circ \varphi)'$.

(5) En déduire la formule de changement de variable pour l'intégrale de Riemann.

**Corrigé 1.** C'est tiré du cours. Réponses rapides.

(1) Si la partie n'est pas majorée, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in [a,b]$ tel que $\varphi(x_n) \geq n$. Par Bolzano–Weierstrass, il existe $(x_{n_k})$ convergente, donc bornée. Mais ceci contredit $\varphi(x_{n_k}) \geq n_k$.

(2) Soit $d = \sup\{\varphi(x) \mid x \in [a,b]\}$. On a $d \in \mathbb{R}$ car l'image de $\varphi$ est majorée et non vide. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ il existe $x_n \in [a,b]$ tel que $d - 1/n < \varphi(x_n) \leq d$. Évidemment $\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = d$. De plus par Bolzano–Weiestrass il existe $(x_{n_k})$ convergente, soit $x_0$ la limite. Par continuité, $\lim_{k\to\infty} \varphi(x_{n_k}) = \varphi(x_0)$. Donc $\varphi(x_0) = d = \max\{\varphi(x) \mid x \in [a,b]\}$. De même il existe $x_0'$ tel que $\varphi(x_0') = \min\{\varphi(x) \mid x \in [a,b]\}$, un minimum que nous allons appeler $c$.

(3) Nous avons le miminum $c$ et maximum $d$ atteints par $\varphi$, donc aussi toutes les valeurs entre les $c$ et $d$ sont atteintes par $\varphi$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Autrement dit $\varphi([a,b]) = [c,d]$. Ainsi $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ appartiennent à $[c,d]$ et l'intégrale est bien définie car $f$ est continue sur $[c,d]$.

(4) Nous savons que toute primitive d'une fonction continue est dérivable sur tout l'intervalle de définition (même aux bords). Ici les fonctions en question sont continues (produit et composition de fonctions continues), donc $H$ et $G$ sont dérivables. Le calcul de $(H \circ \varphi)'$ et $G'$ donne $f(\varphi(x))\varphi'(x)$.

(5) Il ne reste plus qu'à remarquer que les deux primitives $G$ et $H \circ \varphi$ de la fonction ci-dessus valent 0 en $a$, donc elles sont égales. Elles prennent ainsi la même valeur en $b$, ce qui donne :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt = \int_a^b f(\varphi(s))\varphi'(s)ds.$$

**Exercice 2.** Considérons les séries entières suivantes :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n)!} z^n, \qquad \sum_{n\geq 1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n, \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{a^n}{1+b^n} z^n, \qquad \sum_{n\geq 0} \alpha_n z^n, \qquad \sum_{n\geq 0} \beta_n z^n,$$

la troisième série étant définie pour $a, b$ réels positifs, les deux dernières par les relations de récurrence $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = 0$, $\alpha_{n+1} = -\alpha_n - 2\beta_n$ et $\beta_{n+1} = 3\alpha_n + 4\beta_n$.

1. Calculer le rayon de convergence des 3 premières séries.
2. Calculer la somme de la première série lorsque $z$ est réel, en utilisant $z = (\sqrt{z})^2$ ou $z = -(\sqrt{-z})^2$ selon que $z$ soit positif ou négatif.
3. Montrer $\alpha_{n+1} + \beta_{n+1} = 2(\alpha_n + \beta_n)$ et $3\alpha_{n+1} + 2\beta_{n+1} = 3\alpha_n + 2\beta_n$ pour tout $n$. En déduire que le rayon de convergence des deux dernières séries est infini. Que valent leurs sommes ?

**Corrigé 2.** Notons $s_1, \dots, s_5$ les 5 séries entières en question et $R_i$ leurs rayons de convergence.

1. — Pour $s_1$. Règle de d'Alembert. On trouve :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{(2(n+1))!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} = 0,$$

donc $R_1 = \infty$.

— Pour $s_2$. Règle d'Hadamard. On a :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Donc $R_2 = 1/e$.

— Pour $s_3$. On a $a > 0$. On calcule alors, pour d'Alembert :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}(1+b^n)}{a^n(1+b^{n+1})} = a \lim_{n\to\infty} \frac{1+b^n}{1+b^{n+1}} = \begin{cases} a & \text{si } b \leq 1, \\ \frac{a}{b} & \text{si } b > 1. \end{cases}$$

Ainsi on trouve $R_3 = b/a$ si $b > 1$ et $R_3 = 1/a$ si $b \leq 1$.

2. Soit $z \geq 0$ et $y = \sqrt{z}$, donc $y^2 = z$. On sait que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} y^{2n} = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} y^{2n} = \cosh(y) - 1.$$

Donc la somme de la série $s_3$ vaut $\cosh\sqrt{z} - 1$ si $z \geq 0$.

Soit $z \leq 0$ et $y = \sqrt{-z}$, donc $(-1)^n y^{2n} = z^n$ et :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^n = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} y^{2n} = \cos y - 1 = \cos\sqrt{-z} - 1.$$

Donc la somme de la série $s_3$ vaut $\cos\sqrt{-z} - 1$ si $z \leq 0$.

3. Séries nulles, rayon infini, somme nulle.

**Exercice 3.** Développer en série entière les fonctions $f_1$, $f_2$, $f_3$ suivantes autour de l'origine de $\mathbb{R}$, en spécifiant le rayon $R_i$ de convergence du développement de $f_i$.

$$f_1(x) = \ln(x^2 - 6x + 8), \qquad f_2(x) = (2+x)e^x, \qquad f_3(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 - 6x + 9}.$$

**Corrigé 3.** On écrit facilement $x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4)$ et $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$.

1. On écrit :
$$\begin{aligned}\ln(x^2-6x+8) &= \ln((2-x)(4-x)) = \\ &= \ln(2-x)+\ln(4-x) = \ln(2(1-x/2))+\ln(4(1-x/4)) = \\ &= \ln(2)+\ln(4)+\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)+\ln\left(1-\frac{x}{4}\right) = \\ &= \ln(8)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\left(\frac{x}{2}\right)^n+\left(\frac{x}{4}\right)^n\right) = \\ &= \ln(8)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{n4^n}x^n.\end{aligned}$$
Le rayon de convergence est 2.
2. On calcule $f^{(k)}(x)=(k+2+x)e^x$, donc $f^{(k)}(0)=k+2$. La fonction $f$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ puisque $x+2$ et $e^x$ le sont. On en obtient le développement suivant, de rayon infini :
$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+2}{n!}x^n.$$
3. On écrit la décomposition en éléments simples :
$$f_3(x)=\frac{x^2-3x+1}{x^2-6x+9}=1+\frac{3}{x-3}+\frac{1}{(x-3)^2}.$$
On sait :
$$\frac{3}{x-3}=\frac{3}{3(x/3)-3}=\frac{1}{(x/3)-1}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}x^n.$$
Par dérivation, on trouve :
$$\frac{1}{(x-3)^2}=-\left(\frac{1}{x-3}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{3^{n+2}}x^n.$$
Finalement :
$$f_3(x)=1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n-8}{3^{n+2}}x^n.$$
Le rayon de convergence est 3.

**Exercice 4.** Définissons pour tout $n$ entier naturel l'intégrale de Wallis :
$$I_n=\int_0^{\pi/2}\cos^n(t)dt.$$

1. Montrer, à l'aide d'une IPP, que $I_0=\pi/2$, $I_1=1$ puis $nI_n=(n-1)I_{n-2}$ pour $n\geq 2$.
2. En déduire que $nI_nI_{n-1}=\pi/2$ pour tout $n\geq 1$.
3. En raisonnant sur les termes pairs et impairs, en déduire que $\sum_{n\geq 0}I_nx^n$ a rayon de convergence 1.
4. Utiliser la relation de récurrence pour montrer que la somme $f$ de la série $\sum_{n\geq 0}I_nx^n$ satisfait :
$$(1-x^2)f'(x)-xf(x)=1.$$
5. En déduire que $f(x)=(\arcsin x+\pi/2)/\sqrt{1-x^2}$.

**Corrigé 4.** On se souvient que $\sin'(x) = \cos x$ et $\cos'(x) = -\sin x$.

1. On écrit, en considérant une primitive de $\cos(x)$ et la dérivée de $\cos^{n-1}(x)$, pour $n \geq 2$ :
$$I_n = \cos^{n-1}(x)\sin(x)\Big|_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\cos^{n-2}(t)dt.$$
En utilisant $\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t)$ et $\cos(\pi/2) = 0$, $\sin(0) = 0$, on obtient :
$$I_n = (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^{n-2}(t)dt - (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)dt = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n.$$
Ceci équivaut à $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ pour $n \geq 2$. Pour $n = 0, 1$ on trouve
$$I_0 = \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^{\pi/2} \cos(t)dt = \sin(x)\Big|_0^{\pi/2} = 1.$$
2. On déduit que, en posant $u_n = nI_nI_{n-1}$, on obtient $(u_n)$ constante pour $n \geq 1$, car pour tout $n \geq 2$ :
$$u_n = nI_nI_{n-1} = (n-1)I_{n-2}I_{n-1} = u_{n-1}.$$
Donc $nI_nI_{n-1} = u_n = u_1 = I_1I_0 = \pi/2$.
3. On voit que :
$$\lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{I_{n-2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1.$$
Ainsi, les suites extraites des termes pairs et impairs de $(I_n/I_{n-1})$ convergent vers 1. La suite converge donc vers 1 elle même. Le rayon de convergence est donc 1.
4. En écrivant l'équation différentielle sur la série terme à terme, nous avons :
$$(1-n)a_{n-1} + (n+1)a_{n+1} - a_{n-1} = 0.$$
Or ceci est bien satisfait par les $I_n$ à cause des relations de récurrence.
5. On se souvient que :
$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$
Par suite :
$$\left(\frac{\arcsin x + \pi/2}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = \frac{x\,(\arcsin x + \pi/2)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{1-x^2}$$
En multipliant par $(1-x^2)$ et soustrayant $x(\arcsin x + \pi/2)/\sqrt{1-x^2}$ on obtient 1. Comme la solution $(\arcsin x + \pi/2)/\sqrt{1-x^2}$ de l'équation différentielle est bien développable en série entière (de rayon de convergence 1) et que l'équation différentielle détermine les coefficients d'une série entière solution (grâce à la relation de récurrence), nous pouvons conclure que $(\arcsin x + \pi/2)/\sqrt{1-x^2}$ est bien la somme de la série $\sum I_nx^n$.