Analyse – Math31

Temps disponible : 2 heures

Exercice 1. Soit f une fonction de variable réelle, continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

(a) Donner la définition de f uniformément continue sur I.

(b) Donner la définition de recouvrement de I par intervalles ouverts, puis énoncer le théorème de Borel-Lebesgue lorsque I est compact.

(c) Montrer que f est uniformément continue sur I si I est compact.

Soit g une fonction réelle, définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que g est une *fonction de Lipschitz* sur I s'il existe une constante k telle que, pour tout $x, y \in I$, on ait :

$$|g(x) - g(y)| \leq k|x - y|.$$

On dit aussi que g est k-lipschitzienne. On note dans la suite $J = [0, +\infty[$.

(d) Montrer qu'un fonction de Lipschitz sur I est uniformément continue sur I.

(e) Soit $f(x) = 1/(1 + |x|)$. Montrer que f est 1-lipschitzienne sur J puis sur $\mathbb{R}$.

(f) Soit $f(x) = x^2$ définie sur J. Montrer que f n'est pas uniformément continue.

(g) Montrer que $f(x) = \sqrt{x}$ est uniformément continue mais pas de Lipschitz sur J.

Corrigé 1. Les trois premières questions sont relatives au cours.

a) La fonction f est uniformément continue si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, si $x, y \in I$ et $|x - y| < \delta$, alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

b) Un recouvrement par intervalles ouverts $(A_i \mid i \in I)$ indexé par un ensemble I est caractérisé par :

— tout A_i est l'intersection de I avec un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$;

— la réunion des A_i est I.

Le théorème de Borel-Lebesgue affirme que, si I est compact, alors de tout recouvrement ouvert on peut extraire un sous recouvrement fini.

c) Soit f continue sur un intervalle compact I, et fixons $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in I$ il existe δ_x tel que, si $|x - y| < \delta_x$ alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$. Soit alors :

$$A_x = I \cap]x - \delta_x/2, x + \delta_x/2[.$$

Bien sûr $(A_x \mid x \in I)$ est un recouvrement ouvert de I. Donc d'après Borel-Lebesgue on peut en extraire un recouvrement fini $(A_{x_1}, \ldots, A_{x_n})$. Notons $\delta_i = \delta_{x_i}$ et posons :

$$\delta = \min_{i=1,\ldots,n} \left(\frac{\delta_i}{2} \right).$$

Soit alors $x, y \in I$ tels que $|x-y| \leq \delta$. Comme les A_{x_i} couvrent I, on a $x \in A_{x_i}$ pour un certain i, donc $|x-x_i| < \delta_i/2$. Ainsi $|y-x_i| \leq |y-x| + |x-x_i| < \delta + \delta_i/2 \leq \delta_i$. On en déduit :

$$|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-f(x_i)| + |f(x_i)-f(y)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

d) Soit g une fonction k-lipschitzienne sur l'intervalle I et fixons $\varepsilon > 0$. Posons $\delta = \varepsilon/k$. Alors pour tout $x, y \in I$, l'inégalité $|x-y| < \delta$ implique $|f(x)-f(y)| \leq k|x-y| < k\delta = \varepsilon$.

e) Soit $x, y \in J$. Calculons la valeur absolue de $f(x)-f(y)$:

$$|f(x)-f(y)| = \frac{|x-y|}{(1+x)(1+y)} \leq |x-y|.$$

Ainsi f est 1-lipschitzienne sur J. Pour voir qu'elle l'est sur $\mathbb{R}$, on peut remarquer que $f(x) = f(|x|)$. Donc pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on écrit :

$$|f(x)-f(y)| = |f(|x|)-f(|y|)| \leq ||x|-|y|| \leq |x-y|,$$

ce qui prouve que f est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

f) Pour contredire que f est uniformément continue, il faut montrer qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que, quelque soit $\delta > 0$, on peut trouver $x, y \in J$ tels que, malgré $|x-y| < \delta$, on ait $|f(x)-f(y)| > \varepsilon$. Fixons $\varepsilon = 1$ et fixons un réel quelconque $\delta > 0$. Pour n'importe quel $y \in J$, nous prenons $x = y + \delta/2$, de sorte que $|x-y| = x-y = \delta/2 < \delta$. On a alors :

$$|f(x)-f(y)| = x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = \frac{\delta}{2}(2y+\delta/2) = y\delta + \frac{\delta^2}{4}.$$

De cette façon, si $y > \frac{1}{\delta} - \frac{\delta}{4}$, on trouve $|f(x)-f(y)| > 1 = \varepsilon$.

g) Supposons que f soit k-lipschitzienne et soit $x > y$ dans J. Alors :

$$|f(x)-f(y)| = |\sqrt{x}-\sqrt{y}| = \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \leq k(x-y) = k|x-y|.$$

Donc on trouve une contradiction si $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} > k$, ce qui arrive lorsque x et y sont suffisamment proches de 0. Ainsi $\sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne.

Montrons que $\sqrt{x}$ est bien uniformément continue sur J. Bien sûr f est uniformément continue sur $J' = [0,2]$ en tant que fonction continue sur un compact.

De plus, l'argument utilisé pour montrer que f n'est pas lipschitzienne sur J permet de voir que f est $(1/2)$-lipschitzienne (donc uniformément continue) sur $J'' = [1, +\infty[$. En effet, pour $x \geq y$ dans J, on a :

$$|f(x)-f(y)| = |\sqrt{x}-\sqrt{y}| = \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \leq \frac{1}{2}(x-y) = \frac{1}{2}|x-y|,$$

puisque $x \geq 1$ et $y \geq 1$. Bien sûr si $y \geq x$ on a la même inégalité.

Pour montrer que f est uniformément continue sur J, une fois fixé $\varepsilon > 0$, on pourra prendre comme δ le minimum entre $1/2$ et les δ' et δ'' donnés pas l'uniforme continuité de f sur J' et J''. Ce faisant, si $|x-y| < \delta$, on aura $x, y \in J'$ (et dans ce cas $|x-y| < \delta'$) ou $x, y \in J''$ (et dans ce cas $|x-y| < \delta''$). Dans les deux cas, on a $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$.

Exercice 2. Calculer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{(2n)!} z^n; \qquad \sum_{n\geq 1} \ln(n) z^n;$$

$$\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\sin\frac{1}{n}\right) z^n; \qquad \sum_{n\geq 0} \tan\left(\frac{n\pi}{7}\right) z^n.$$

Corrigé 2. Pour la première :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(2(n+1))!}\frac{(2n)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} = 0,$$

donc $R = +\infty$.

Pour la deuxième :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1,$$

ainsi $R = 1$.

Pour la troisième, lorsque n tend vers $+\infty$, on a l'équivalence :

$$\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n},$$

donc :

$$\ln\left(1+\sin\frac{1}{n}\right) \sim \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}.$$

Ainsi, $R = 1$.

Pour la dernière, on remarque d'abord que $\tan(y)$ est défini si et seulement si $y \neq \pi/2 + k\pi$, quelque soit $k \in \mathbb{Z}$, ce qui fait que le général de notre série est toujours bien défini. Au fait :

$$\tan\left(\frac{n\pi}{7}\right) \in V = \left\{0, \tan\left(\frac{\pi}{7}\right), \dots, \tan\left(\frac{13\pi}{7}\right)\right\}.$$

Soit v le maximum des valeurs absolues des éléments de V. Par ailleurs on peut voir que $v = \tan(10\pi/7)$. On a :

$$\left|\tan\left(\frac{n\pi}{7}\right) z^n\right| \leq v|z|^n,$$

donc $R \geq 1$. De plus, si $|z| > 1$:

$$\left|\tan\left(\frac{7n+1\pi}{7}\right) z^{7n+1}\right| = \tan\left(\frac{\pi}{7}\right) |z|^{7n+1},$$

qui ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers ∞. Ainsi $R = 1$.

Exercice 3. Développer en série les fonctions suivantes autour de l'origine, en spécifiant l'ensemble de convergence du développement. Ici z désigne une variable complexe et x une variable réelle. On rappelle aussi $\cos(z) = 1/2(e^{iz} + e^{-iz})$ et $\cosh(z) = 1/2(e^{z} + e^{-z})$.

$$\frac{1}{2z^2 - 3z + 1}; \qquad \ln(x^2 - 5x + 6); \qquad \cos(z)\cosh(z).$$

Corrigé 3. Pour $\frac{1}{2z^2-3z+1}$. On écrit :

$$\frac{1}{2z^2 - 3z + 1} = \frac{2}{1-2z} - \frac{1}{1-z}.$$

On obtient :

$$\frac{1}{2z^2 - 3z + 1} = 2\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty}(2^{n+1} - 1)z^n.$$

Le rayon de convergence de ce développement est $1/2$.

Pour $\ln(x^2 - 5x + 6)$. On écrit :

$$\ln(x^2 - 5x + 6) = \ln(x-3) + \ln(x-2) = \ln 6 + \ln\left(\frac{x}{3} - 1\right) + \ln\left(\frac{x}{2} - 1\right).$$

En utilisant $\ln(y-1) = -\sum_{n=1}^{\infty} y^n/n$ sur $D(0,1)$, on arrive au développement :

$$\ln(x^2 - 5x + 6) = \ln 6 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\left(\frac{x}{3}\right)^n + \left(\frac{x}{2}\right)^n\right).$$

Finalement on peut écrire :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad a_0 = \ln 6, \qquad a_n = -\frac{2^n + 3^n}{n 6^n}, \qquad \text{pour } n \geq 1.$$

Le rayon de convergence est 2.

Pour $\cos(z)\cosh(z)$. D'abord on sait que $\cos z$ et $\cosh z$ ont des développement $\cos(z)\cosh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ en série entière défini partout, donc cette fois on aura rayon de convergence infini. On écrit :

$$\cos(z)\cosh(z) = \frac{1}{4}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)\left(e^{z} + e^{-z}\right) = \frac{1}{4}\left(e^{(i+1)z} + e^{(i-1)z} + e^{(-i+1)z} + e^{(-i-1)z}\right).$$

Bien sûr, on a $e^w = \sum_{n=0}^{\infty} w^n/n!$ donc :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{4n!}((1+i)^n + (1-i)^n + (-1+i)^n + (-1-i)^n) = \\ &= \frac{1}{4n!}(1+i)^n(1 + (-i)^n + i^n + (-1)^n) = \frac{1}{4n!}(1+i)^n(1+(-1)^n)(1+i^n). \end{aligned}$$

On se rend compte alors que $a_n \neq 0$ uniquement si $n = 4m$. De plus, $(1+i)^{4m} = (-1)^m 4^m$, $1 + (-1)^{4m} = 1 + i^{4m} = 2$. Ainsi le $1/4$ est compensé par le $2 \cdot 2$ et on obtient :

$$a_{4m} = \frac{(-1)^m 4^m}{(4m)!}.$$

Exercice 4. Considérons la série entière $\sum_{n\geq 0} n^2 z^n$ et notons f sa fonction somme.

(1) Déterminer le rayon de convergence de cette série.

(2) Soit $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^{n-1}$. Donner le développement en série entière en 0 de la primitive G de g satisfaisant à $G(0) = 0$. Que peut-on dire de son rayon de convergence ?

(3) Soit $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n z^{n-1}$. Donner le développement en série entière en 0 de la primitive H de h satisfaisant à $H(0) = 0$. En déduire $H(z) = z/(1-z)$.

(4) Démontrer que, dans un voisinage de 0 que vous déterminerez, on a :

$$f(z) = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}.$$

Corrigé 4. Pour tout z à l'intérieur du disque de convergence de f on a $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n$.

(1) On calcule :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1,$$

donc $R = 1$.

(2) D'après la dérivation des séries entières terme à terme on a :

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n z^n.$$

On voit immédiatement que le rayon de convergence de G est aussi 1.

(3) Comme dans la question précédente on trouve :

$$H(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n.$$

On calcule le rayon de convergence de H et on obtient 1. On en déduit facilement :

$$H(z) = z\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{z}{1-z}.$$

(4) Il est clair que, pour tout z de module inférieure à 1, on a $f(z) = zg(z)$. Ensuite, on voit :

$$zh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n z^n, \qquad \text{donc :} \qquad (zh(z))' = g(z).$$

Par ailleurs, on a $(zh(z))' = h(z) + zh'(z)$. De plus :

$$h(z) = H'(z) = \frac{1-z+z}{(1-z)^2} = \frac{1}{(1-z)^2}; \qquad h'(z) = H''(z) = \frac{2}{(1-z)^3}.$$

On a alors :

$$f(z) = zg(z) = z(zh(z))' = z\left(\frac{1}{(1-z)^2} + \frac{2z}{(1-z)^3}\right) = z\frac{1-z+2z}{(1-z)^3} = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}.$$

Le voisinage en question est donc le disque centré en 0 de rayon 1.

Exercice 5. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et f intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$. Notons :

$$I_n(f) = \int_a^b f(x)e^{inx}dx.$$

(1) Justifier que $I_n(f)$ est bien défini.
(2) On considère, pour $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$, la fonction indicatrice $f = \chi_{[\alpha,\beta]}$, qui vaut 1 sur $[\alpha, \beta]$ et 0 ailleurs. Montrer que $\lim_{n\to\infty} I_n(f) = 0$.
(3) Soit f en escalier sur $[a, b]$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} I_n(f) = 0$.
(4) Montrer que $\lim_{n\to\infty} I_n(f) = 0$, quelque soit f Riemann-intégrable.

Corrigé 5. Pour cet exercice on utilisera un petit peu les primitives élémentaires.

(1) La fonction f est intégrable en tant que fonction continue sur un intervalle compact. De même pour $e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx)$. Ainsi leur produit est aussi intégrable.
(2) La fonction indicatrice f étant en escalier, l'intégrale $I_n(f)$ est bien définie. On peut aussi calculer explicitement l'intégrale, sachant que la dérivée de $\frac{1}{in}e^{inx}$ est e^{inx}. Donc :
$$\left|\int_a^b \chi_{[\alpha,\beta]}e^{inx}dx\right| = \left|\frac{1}{in}\left(e^{in\beta} - e^{in\alpha}\right)\right| \leq \frac{2}{n}.$$
ce qui tend vers 0 lorsque n tend vers ∞.
(3) Si f est en escalier, il existe une subdivision $(a = x_0 < \cdots < x_n = b)$ et des valeurs $m_1, \ldots, m_n$ telles que $f(x) = m_i$ pour tout $x \in]x_{i-1}, x_i[$. Ainsi :
$$f = \sum_{i=1}^n m_i\chi_{[x_{i-1},x_i]}, \qquad \text{et donc :} \qquad \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n m_i \int_a^b \chi_{[x_{i-1},x_i]}(x)dx.$$
Cette valeur a donc limite nulle lorsque n tend vers ∞ d'après la question précédente.
(4) Soit f intégrable. Pour $\varepsilon > 0$, il existe alors g en escalier, telle que $\int_a^b |f(x) - g(x)|dx < \varepsilon$. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer une suite (φ_m, ϑ_m) associée à f, prendre $\int_a^b \vartheta_m(x)dx < \varepsilon$ et choisir $g = \varphi_m$. Ainsi, g étant en escalier, on a $\lim_{n\to\infty} I_n(g) = 0$.
On obtient :
$$\begin{aligned}|I_n(f)| = \left|\int_a^b f(x)e^{inx}dx\right| &\leq \left|\int_a^b (f(x) - g(x))e^{inx}dx\right| + \left|\int_a^b g(x)e^{inx}dx\right| \leq \\ &\leq \int_a^b |f(x) - g(x)|\,|e^{inx}|dx + |I_n(g)| \leq \\ &\leq \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx + |I_n(g)| \leq \varepsilon + |I_n(g)|\,.\end{aligned}$$
En faisant tendre n à l'infini, on obtient $\limsup_{n\to\infty} |I_n(f)| \leq \varepsilon$. Ceci étant valable pour n'importe quel $\varepsilon > 0$, on conclut $\lim_{n\to\infty} I_n(f) = \limsup_{n\to\infty} |I_n(f)| = 0$.