Notes du cours d'analyse

Daniele Faenzi

9 décembre 2020

Ce notes couvrent le cours dispensé lors des séances de Math3A pour l'année scolaire 2020/2021.

Il est fortement conseillé d'utiliser des manuels pour compléter et préciser ces notes.

Un très joli livre d'analyse qui couvre largement tout le matériel proposé dans ces notes et bien au-delà est [**LFA77**].

Des textes très bien adaptés au niveau de Math3A sont :

— Les chapitres 5, 8, 10, 11, 12, 15, 16 de [**Esc20**] ;

— Les chapitres 1 à 5 de [**GD09**] ;

— L'ouvrage [**CE05**].

— Les chapitres chapitres 3 et 4 de [**Gou20**].

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

SUITES NUMÉRIQUES

1.I. La droite réelle

Nous rappelons quelques propriétés de la droite réelle $\mathbb{R}$. On construira celle-ci avec les coupures rationnelles. On commencera par supposer que le lecteur a une certaine familiarité avec les nombres réels afin d'en montrer deux caractéristiques principales : le caractère archimédien et la propriété de la borne supérieure. Ensuite nous allons donner une définition de $\mathbb{R}$ pour nous convaincre que ces deux propriétés sont bien vérifiées.

L'idée principale de ce chapitre est de justifier que la plupart des propriétés fondamentales de $\mathbb{R}$ découlent soit du le caractère archimédien de $\mathbb{R}$ – on verra que la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ vient de cela – et la propriété de la borne supérieure – d'où on déduira le principe de Cantor, puis la convergence des suites adjacentes ou croissantes et majorées et enfin de Cauchy, donc le caractère complet de $\mathbb{R}$.

1.I.A. Caractère archimédien de la droite réelle. —

1.I.A.1. Axiome d'Archimède. — Le résultat suivant est appelé traditionnellement axiome d'Archimède.

Théorème 1.I.1. — *Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe alors $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > x$.*

Une preuve sera donnée dans le chapitre sur la construction de $\mathbb{R}$.

Corollaire 1.I.2. — *Soit $x \in \mathbb{R}$ et $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$. Il existe alors un entier n tel que $n\varepsilon > x$.*

Démonstration. — Il suffit d'appliquer l'axiome d'Archimède 1.I.1 à $\frac{x}{\varepsilon}$. □

Proposition 1.I.3. — *Soit $x \in \mathbb{R}$ et $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$. Il existe alors un unique entier n tel que :*

$$n\varepsilon \leq x < (n+1)\varepsilon.$$

Démonstration. — Appliquons le corollaire précédent à $|x|$. Il existe alors un entier m tel que $|x| \leq m\varepsilon$, donc $-m\varepsilon \leq x \leq m\varepsilon$. On considère alors :

$$P = \{p \in \mathbb{Z} \mid p\varepsilon \leq x\}.$$

Bien sûr, $-m \in P$ donc $P \neq \emptyset$. De plus, $x \leq m\varepsilon$ donc $p \in P$ vaut au plus m. Soit alors n le plus grand élément de P. On a $n\varepsilon \leq x$, et $(n+1)\varepsilon > x$ car $n+1$ n'appartient pas à P. □

1.I.A.2. Densité des rationnels dans les réels. — Le théorème suivant affirme que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, autrement dit que tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ recoupe des points de $\mathbb{Q}$.

Théorème 1.I.4. — *Soit $x < y \in \mathbb{R}$. Alors il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $x < r < y$.*

Démonstration. — Prenons $\varepsilon = y - x > 0$ et $1 \in \mathbb{R}$. Il existe alors un entier q tel que $q\varepsilon > 1$ d'après le corollaire 1.I.2. Ainsi $q > 0$. On remplace ensuite ε pour la nouvelle valeur $\varepsilon = 1/q$, et on utilise la proposition 1.I.3 pour trouver un unique entier p tel que :

$$\frac{p}{q} \leq x < \frac{p+1}{q}.$$

On a alors :

$$qy > 1 + qx \geq 1 + p.$$

Donc $r = \frac{p+1}{q} < y$. Ainsi $x < r < y$. Bien entendu, $r \in \mathbb{Q}$. □

1.I.B. Bornes. — Ici nous allons introduire la notion très importante de borne supérieure et inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$. La plupart des résultats sur l'existence de certaines limites s'appuient sur la propriété de la borne supérieure que nous allons évoquer dans cette partie.

1.I.B.1. Majorant et minorant. —

Définition 1.I.5. — Soit X une partie de $\mathbb{R}$. Un *majorant* de X est un nombre $b \in \mathbb{R}$ tel que $x \leq b$ pour tout $x \in X$. Un *minorant* de X est $a \in \mathbb{R}$ tel que $x \geq a$ pour tout $x \in X$.

Clairement, si b est un majorant de X, alors $b' \geq b$ est aussi un majorant de X. De même si a est un minorant de X, alors $a' \leq a$ est aussi un minorant de X.

On dit que X est *majorée* si X admet un majorant et que X est *minorée* si X admet un minorant. Une partie majorée et minorée et appelée *bornée*. Ces adjectifs s'appliquent à une suite numérique (u_n) en posant $X = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

1.I.B.2. Borne supérieure et inférieure. — La borne supérieure d'une partie majorée et non vide X de $\mathbb{R}$ est le plus petit parmi tous les majorants de X. Si X n'est pas majorée ou si X est vide, la borne supérieure de X n'est pas définie.

Définition 1.I.6. — Soit X une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. Une *borne supérieure* de X est un majorant b de X tel que, pour toute autre majorant c de X, on ait $b \leq c$.

Remarque 1.I.7. — Si b et b' sont deux bornes supérieures de X, alors b' étant un majorant de X, on a $b \leq b'$ par définition de b comme minimum des majorants. Pour la même raison on a $b' \leq b$ donc $b = b'$. Ceci nous autorise à noter $b = \sup X$.

Proposition 1.I.8. — *Soit $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Alors $b = \sup X$ si et seulement si :*

i) pour tout $x \in X$, *on a* $x \leq b$ *;*

ii) pour tout $\varepsilon > 0$, *il existe* $x \in X$ *tel que* $b - x < \varepsilon$.

Démonstration. — Soit $b = \sup X$. Puisque b est un majorant de X, on a $x \leq b$ pour tout $x \in X$. Ensuite, fixons $\varepsilon > 0$. Si pour tout $x \in X$ on avait $x \leq b - \varepsilon$, alors $b - \varepsilon$ serait un majorant de X strictement plus petit de b, ce qui contredit la minimalité de b. Donc il existe $x \in X$ tel que $x > b - \varepsilon$, ce qui montre (ii).

Réciproquement, si (i) est valide, b est un majorant de X. Si $c < b$ est un autre majorant de X, alors $\varepsilon = b - c > 0$, et d'après (ii) il existe $x \in X$ tel que $b - x < \varepsilon = b - c$. Donc $x > c$, et c ne peut être un majorant de X. Donc forcément $b = \sup X$. □

Remarque 1.I.9. — La borne supérieure d'une partie X de $\mathbb{R}$ n'a aucune raison d'appartenir à X. Par exemple, si $X = \{-1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$, on a $\sup X = 0$, mais $0 \notin X$.

Le théorème suivant est appelé *propriété de la borne supérieure*.

Théorème 1.I.10. — *Toute partie X non vide majorée de* $\mathbb{R}$ *admet une borne supérieure.*

Une preuve sera donnée lors de la construction de $\mathbb{R}$.

1.I.C. Définition de $\mathbb{R}$. —

1.I.C.1. Coupures de Dedekind dans les rationnels. —

Définition 1.I.11. — Une *coupure* de Dedekind de $\mathbb{Q}$, ou une *coupure rationnelle*, est une partie $A \subset \mathbb{Q}$ satisfaisant à :

i) $A \neq \emptyset$, $A \neq \mathbb{Q}$;

ii) pour tout $a \in A$ et tout rationnel $x < a$, on a $x \in A$;

iii) pour tout $a \in A$, il existe $x \in A$, avec $x > a$.

Étant donné $r \in \mathbb{Q}$, on pose $A(r) = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < r\}$. Ceci est évidemment une coupure.

Exemple 1.I.12. — Soit :

$$A = \{r \in \mathbb{Q}_{\geq 0} \mid r^2 < 2,\} \cup \mathbb{Q}_{\leq 0}.$$

Ceci est une coupure, en effet en premier lieu $\emptyset \neq A \neq \mathbb{Q}$. Deuxièmement, si $r \in A$ et $x < r$, on a facilement $x \in A$: si $x < 0$ c'est clair, sinon $r \geq 0$ aussi, et $x < r$ implique $x^2 < r^2 \leq 2$. Finalement, si $r^2 < 2$, on peut trouver un rationnel $x > r$ tel que $x^2 < 2$. Par exemple :

$$x = \frac{2r+2}{r+2}.$$

Définition 1.I.13. — La *droite réelle* $\mathbb{R}$ est l'ensemble des coupures de Dedekind de $\mathbb{Q}$. Les éléments de la droite réelle (c'est-à-dire, les coupures de $\mathbb{Q}$) seront appelés désormais *nombres réels* et notés usuellement avec une petite lettre.

En associant $A(r)$ à $r \in \mathbb{Q}$, on obtient une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Par abus de notation on écrit $r \in \mathbb{R}$ plutôt que $A(r) \in \mathbb{R}$.

On définit une *relation d'ordre* entre les nombres réels de la manière suivante : si A et B sont deux coupures de Dedekind de $\mathbb{Q}$, on pose $A \leq B$ si et seulement si $A \subset B$, puis $A < B$ si $A \leq B$ et $A \neq B$.

1.I.C.2. Ordre. —

Proposition 1.I.14. — *Soit $A \neq B$ deux coupures de Dedekind de $\mathbb{Q}$. On a alors l'une des deux alternatives : $A \subset B$ ou $B \subset A$.*

Démonstration. — Nous avons deux possibilités :

1. Pour tout $b \in B$, il existe $a \in A$ tel que $a > b$. Dans ce cas, $b \in A$ donc $B \subset A$.
2. Si le cas précédent ne se présente pas, alors il existe $b \in B$ tel que, pour tout $a \in A$, on a $b \leq a$. Il existe alors $b' \in B$ avec $b' < b$ donc $b' < a$, quel que soit $a \in A$. Alors $a \in B$ et $A \subset B$.

□

1.I.C.3. Opérations avec les réels. —

Définition 1.I.15. — On définit l'opération de somme entre nombres réels de la manière suivante : si A et B sont deux coupures de Dedekind de $\mathbb{Q}$, on pose :

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

Ensuite on pose :

$$-A = \{b \in \mathbb{Q} \mid b < -a, \forall a \in A\}.$$

On vérifie immédiatement que $A + B$ et $-A$ sont des coupures de Dedekind de $\mathbb{Q}$. On pose aussi $|A| = A$ si $A \geq 0$ et $|A| = -A$ si $A \leq 0$.

Pour le produit, on commence avec $A \geq 0$ et $B \geq 0$. Dans ce cas on pose :

$$AB = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 0\} \cup \{ab \mid A \ni a > 0, B \ni b > 0\}.$$

En général, on pose :

$$AB = \begin{cases} |A||B|, & \text{si } A \text{ et } B \text{ ont même signe,} \\ -|A||B|, & \text{si } A \text{ et } B \text{ ont signe opposé.} \end{cases}$$

On vérifie que AB est une coupure de Dedekind de $\mathbb{Q}$.

Théorème 1.I.16. — *La droite réelle, avec les opérations définies ci-dessus, est un corps commutatif totalement ordonné, qui contient $\mathbb{Q}$ comme sous corps, ayant 0 comme élément neutre et 1 comme unité, les relations d'ordre de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{Q}$ étant compatibles.*

Nous omettons la preuve, qui est élémentaire mais un peu longue. Rappelons juste ce qu'il faut vérifier, pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}$:

1. $0 + a = a + 0 = a$
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$
3. $a + b = b + a$
4. $a + (-a) = 0$
5. $1a = a1 = a$
6. $(ab)c = a(bc)$
7. $ab = ba$
8. $a(b + c) = ab + ac$

9. si $a \neq 0$, alors il existe $1/a \in \mathbb{R}$ tel que $a \cdot (1/a) = 1$.
10. $a \leq b$ implique $a + c \leq b + c$
11. $a \leq b$ et $c \geq 0$ implique $ac \leq bc$.

1.I.C.4. Preuve de l'axiome d'Archimède. —

Démonstration. — Nous revenons à la définition de $\mathbb{R}$ comme ensemble des coupures de Dedekind de $\mathbb{Q}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \in \mathbb{Q}$, comme $\mathbb{Q}$ est clairement archimédien, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > x$. Sinon, soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Le réel x est une coupure A de $\mathbb{Q}$, en particulier $A \neq \mathbb{Q}$, et il existe $r \in \mathbb{Q} \setminus A$, donc $r > a$ pour tout $a \in A$. De nouveau comme $\mathbb{Q}$ est archimédien, il existe un entier $n > r$, donc $n > a$ pour tout $a \in A$. Alors $A \neq A(n)$, car sinon $x \in \mathbb{Q}$. Ainsi $A \subset A(n)$. Donc $x < n$. □

1.I.C.5. Preuve de l'existence des bornes. —

Démonstration. — Nous revenons, pour la dernière fois, à la définition de $\mathbb{R}$ comme ensemble des coupures de Dedekind de $\mathbb{Q}$. Un élément de $\mathbb{R}$ est une coupure de Dedekind de $\mathbb{Q}$ donc une partie A de $\mathbb{Q}$. On pose :

$$B = \cup_{A \in X} A.$$

Montrons que B est une coupure de Dedekind de $\mathbb{Q}$. Bien sûr, on a $B \neq \emptyset$. De plus, comme X est bornée, il existe $b \in \mathbb{N}$ tel que $b > x$, pour tout $x \in X$. Donc tout $A \in X$ est contenu dans $A(b)$. Ainsi $B \subset A(b) \neq \mathbb{Q}$. On a montré (i).

Pour montrer (ii), on prend $a \in B$ et un rationnel $r < a$. D'après la définition de B, il existe $A \in X$ tel que $a \in A$. Comme A est une coupure de Dedekind rationnelle, on a $r \in A \subset B$ donc $r \in B$. Ainsi, tout rationnel inférieur à $a \in B$ appartient aussi à B.

Pour vérifier (iii), on prend $a \in B$ et on cherche $x \in B$ avec $x > a$. Mais $a \in A$ pour un certain $A \in X$, donc il existe $x \in A \subset B$ avec $x > a$.

Il est clair que B est un majorant de X. En effet, pour tout $A \in X$, on a $A \subset B$ comme nous l'avons déjà observé. Pour montrer que B est le plus petit parmi les majorants de X, on prend une coupure C de Dedekind de $\mathbb{Q}$ qui contient tous les $A \in X$. Alors C contient leur réunion, c'est-à-dire $B \subset C$. □

Exemple 1.I.17. — Soit X l'ensemble des réels x, dont le développement décimal $x = x_0, x_1 x_2 \cdots$ satisfait à :

1. $x_0 = 0$;
2. $x_n = 5$, pour un nombre infini de valeurs de n ;
3. $x_1 + x_2 + x_3 = 20$.

On peut voir que $\sup X = 0,993$. Cette borne n'appartient pas à X.

1.II. Convergence des suites numériques

1.II.A. Rappels sur les limites. —

1.II.A.1. Limite d'une suite. — La convergence des suites est la notion principale de ce chapitre.

Définition 1.II.1. — Soit (u_n) une suite numérique. On dit que (u_n) converge vers $a \in \mathbb{R}$ si, pour tout réel $\varepsilon > 0$ fixé, il existe un entier n_ε, tel que :

$$|u_n - a| < \varepsilon, \qquad \text{pour tout } n \geq n_\varepsilon.$$

On écrit dans ce cas :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = a.$$

On dit que (u_n) tend vers $+\infty$ si, pour tout $M \in \mathbb{R}$ il existe un entier m tel que :

$$u_n > M, \qquad \text{pour tout } n \geq m.$$

On dit que (u_n) tend vers $-\infty$ si, pour tout $M \in \mathbb{R}$ il existe un entier m tel que :

$$u_n < M, \qquad \text{pour tout } n \geq m.$$

On écrit alors $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$ ou $\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$. Parfois on supprime la partie "$n \to \infty$" des symboles de limite.

1.II.A.2. Suites convergentes et bornes. — Nous reviendrons dans quelques pages sur l'idée de partie bornée de $\mathbb{R}$. Ici nous remarquons juste qu'une suite convergente est bornée.

Proposition 1.II.2. — *Soit (u_n) convergente vers $a \in \mathbb{R}$. Alors il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on ait $|u_n| \leq b$.*

Démonstration. — Soit (u_n) notre suite et a sa limite. Pour tout ε il existe n_ε tel que, pour tout $n \geq n_\varepsilon$ on ait $|u_n - a| < \varepsilon$. Il s'en suit que $|u_n| < \varepsilon + |a|$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$|u_n| \leq \max\{|u_0|, \ldots, |u_{n_\varepsilon - 1}|, |a| + \varepsilon\} = b.$$

□

1.II.A.3. Opérations avec les limites. —

Proposition 1.II.3. — *Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques, et supposons :*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = a \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{n\to\infty} v_n = b \in \mathbb{R}.$$

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda a + \mu b,$$
$$\lim_{n\to\infty} (u_n v_n) = ab.$$

De plus, si $a \neq 0$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \neq 0$ pour tout $n \geq N$, et on a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{a}.$$

Démonstration. — Montrons d'abord la linéarité de la limite. Soit $\varepsilon > 0$. On peut supposer $\lambda \neq 0 \neq \mu$, car autrement il n'y a rien à démontrer. Il existe alors des entiers N et M tels que :

$$n \geq N \Longrightarrow |u_n - a| < \frac{\varepsilon}{2|\lambda|},$$
$$n \geq M \Longrightarrow |v_n - b| < \frac{\varepsilon}{2|\mu|}.$$

Donc si $n \geq L = \max(N, M)$, on aura :

$$\left|\lambda u_n + \mu v_n - (\lambda a + \mu b)\right| \leq |\lambda||u_n - a| + |\mu||v_n - b| < |\lambda|\frac{\varepsilon}{2|\lambda|} + |\mu|\frac{\varepsilon}{2|\mu|} = \varepsilon.$$

Ceci montre le premier énoncé, c'est-à-dire la linéarité de la limite.

Pour le produit, on se souviendra de la proposition (1.II.2), qui affirme l'existence de $0 < c \in \mathbb{R}$ tel que $|v_n| \leq c$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$. On remarque :

$$\begin{aligned}|u_n v_n - ab| &\leq |u_n v_n - a v_n| + |a v_n - ab| \leq |v_n||u_n - a| + |a||v_n - b| \leq \\ &\leq c|u_n - a| + |a||v_n - b|.\end{aligned}$$

Il existe alors des entiers N et M tels que :

$$n \geq N \Longrightarrow |u_n - a| < \frac{\varepsilon}{2c},$$
$$n \geq M \Longrightarrow |v_n - b| < \frac{\varepsilon}{2|a|},$$

ou alors si $a = 0$ nous pouvons prendre $M = 0$. Donc pour $n \geq L = \max(N, M)$ on aura :

$$|u_n v_n - ab| \leq c|u_n - a| + |a||v_n - b| < \varepsilon.$$

Finalement pour la division, comme $a \neq 0$, nous pouvons choisir $\delta > 0$ tel que $\alpha := |a| - \delta > 0$ et $M \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq M$, on ait $|u_n - a| < \delta$ et donc par l'inégalité triangulaire

$$|a| - |u_n| < \delta,$$

à savoir

$$|u_n| > \alpha > 0.$$

De plus, pour $n \geq M$ on a :

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{a - u_n}{u_n a}\right| < \frac{|a - u_n|}{|a|\alpha}$$

Étant donné $\varepsilon > 0$, il suffit alors de choisir $P \geq M$ tel que $n \geq P$ entraîne :

$$|u_n - a| < |a|\alpha\varepsilon.$$

Pour $n \geq P$, on aura alors $|1/u_n - 1/a| < \varepsilon$. □

1.II.B. Suites équivalentes. —

Définition 1.II.4. — Deux suites numériques (u_n) et (v_n) sont *équivalentes* s'il existe une suite (ω_n) telle que :

i) $u_n = \omega_n v_n$ à partir d'un certain rang;

ii) $\lim_{n\to\infty}(\omega_n) = 1$.

Proposition 1.II.5. — *Soit (u_n) une suite convergente vers $a \in \bar{\mathbb{R}}$, et soit (v_n) équivalente à (u_n). Alors (v_n) tend aussi vers a.*

Démonstration. — La preuve est immédiate par application de la limite du produit. □

1.II.C. Principe des intervalles emboîtés. — Un intervalle I de $\mathbb{R}$ est un ensemble de la forme $I =]a,b[$, ou $I = [a,b[$, ou $I =]a,b]$, ou $I = [a,b]$, avec $a \leq b \in \bar{\mathbb{R}}$, avec la condition que, si $a = -\infty$, uniquement les écritures $]a,b]$ et $]a,b]$ sont autorisées (et de même pour $b = +\infty$).

On parle d'intervalle ouvert pour $I =]a,b[$, d'intervalle fermé pour $I = [a,b]$. On parle aussi d'intervalle ouvert ou fermé à droite ou à gauche.

Si $a,b \in \mathbb{R}$, on écrit $\ell(I) = b-a$. Si $a = -\infty$ (ou $b = +\infty$) et $a < b$, on écrit $\ell(I) = \infty$.

1.II.C.1. Axiome de Cantor. —

Définition 1.II.6. — Une *suite décroissante d'intervalles emboîtés* (I_n) est la donnée de, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un intervalle *fermé borné* I_n, avec $I_{n+1} \subset I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et satisfaisant à :

$$\lim_{n\to\infty} \ell(I_n) = 0.$$

Théorème 1.II.7. — *Soit (I_n) une suite décroissante d'intervalles emboîtés. Alors il existe un $c \in \mathbb{R}$, et un seul, qui appartient à tous les I_n, i.e. :*

$$\{c\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n.$$

Démonstration. — Soit $I_n = [a_n, b_n]$. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, nous avons $a_m \leq b_n$, pour tout $m \in \mathbb{N}$. En effet, si $m \leq n$ on a $a_m \leq a_n \leq b_n$ car $I_n \subset I_m$, tandis que si $m \geq n$ on a $a_m \leq b_m \leq b_n$ car $I_m \subset I_n$.

La suite (a_m) est donc majorée, ainsi elle admet une borne supérieure c d'après le théorème 1.I.10. Bien sûr $c \geq a_m$ pour tout m, et de plus $c \leq b_n$ pour tout n car $a_m \leq b_n$. Ceci montre que $c \in I_n$ quel que soit n, donc $c \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$.

Montrons que $\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$ ne contient que c. S'il n'en était pas ainsi, on aurait un autre élément $d \neq c$ dans $\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$, disons $d > c$. On aurait alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n \leq c < d \leq b_n,$$

donc $I = [c,d]$ serait entièrement contenu dans $\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on aurait $[c,d] \subset I_n$ donc $\ell(I_n) \geq d-c$. Finalement ceci entraînerait $\lim_{n\to\infty} \ell(I_n) \geq d-c > 0$, ce qui contredit l'hypothèse $\lim_{n\to\infty} \ell(I_n) = 0$. □

1.II.C.2. Suites adjacentes. —

Définition 1.II.8. — Deux suites numériques (u_n) et (v_n) sont *adjacentes* si :

i) (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante ;

ii) $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang ;

iii) $\lim_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 0$.

Proposition 1.II.9. — *Soit (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes. Alors :*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. — Évidemment on peut supposer que $u_n \leq v_n$ soit valable pour tout n (quitte à tronquer les deux suites). La preuve est alors la même que pour l'axiome de Cantor, en effet en posant $I_n = [u_n, v_n]$ on obtient une suite décroissante d'intervalles emboîtés. Le point limite des deux suites est l'intersection de tous les intervalles I_n. □

1.II.D. Suites monotones. — Le résultat suivant est aussi très important.

Théorème 1.II.10. — *Une suite numérique croissante est convergente si et seulement si elle est majorée. Dans ce cas elle converge à sa borne supérieure. Sinon elle tend vers $+\infty$.*

Démonstration. — Soit (u_n) une suite numérique croissante. Si (u_n) n'est pas bornée, alors pour tout $b \in \mathbb{R}$ il existe $n_b \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_b} > b$. Donc $u_n > b$ pour $n \geq n_b$ puisque (u_n) est croissante. Ceci montre que $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

Par contre, si (u_n) est bornée, soit b la borne supérieure de (u_n). Donc $u_n \leq b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $|u_n - b| = b - u_n$. Montrons que (u_n) tend vers b. Soit $\varepsilon > 0$. D'après la Proposition 1.I.8, il existe n_ε tel que $b - u_{n_\varepsilon} < \varepsilon$. Puisque (u_n) est croissante, on a $b - u_n < b - u_{n_b} < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_b$. Ceci montre que (u_n) tend vers b.

Réciproquement, nous avons déjà vu que toute suite convergente est bornée. □

Exemple 1.II.11. — Soit $u_0 \in [-1, 1]$ et u_n définit par récurrence par :

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2}.$$

On voit par récurrence que (u_n) est croissante et majorée par 1. On a donc $a = \lim_{n\to\infty} u_n$ et $a \leq 1$. De plus, d'après la relation de récurrence, on a :

$$a = \frac{a^2 + 1}{2},$$

donc $a = 1$.

1.III. Suites de Cauchy, espaces complets

La notion d'espace complet, que nous allons considérer principalement pour la droite réelle, repose sur l'idée de suite de Cauchy.

1.III.A. Suite de Cauchy. — Une suite de Cauchy est une suite dont les termes se rapprochent les uns des autres, différemment d'une suite convergente, dont les termes se rapprochent d'une valeur précise.

Définition 1.III.1. — Une suite (u_n) est *de Cauchy* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N = N_\varepsilon$ tel que, pour tout $p, q \geq N$, on ait :

$$\left|u_p - u_q\right| < \varepsilon.$$

Exemple 1.III.2. — La suite $(\frac{n+1}{n})_{n\geq 1}$ est de Cauchy. En effet, si on fixe $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $1/N < \varepsilon/2$. Alors, pour $n \geq m > N$ on a :

$$\left|\frac{n+1}{n} - \frac{m+1}{m}\right| = \frac{n-m}{nm} \leq \frac{n}{nm} + \frac{m}{nm} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Exemple 1.III.3. — La suite $(\ln n)_{n\geq 1}$ n'est pas de Cauchy. En effet, si $p > n > 0$, on a :

$$|\ln p - \ln n| = \ln \frac{p}{n}.$$

Donc si $p = 2n$ on a $|\ln p - \ln n| = \ln 2$, ce qui n'est pas $\leq \varepsilon$ lorsque $\varepsilon < \ln 2$.

***Proposition 1.III.4* (Cauchy par intervalles).** — *Une suite numérique (u_n) est de Cauchy si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ et un intervalle fermé I avec $\ell(I) \leq \varepsilon$, tels que pour tout $n \geq n_\varepsilon$ on ait $u_n \in I$.*

Démonstration. — Soit (u_n) de Cauchy et fixons $\varepsilon > 0$. Nous avons alors n_ε tel que, quel que soit $p, n \geq n_\varepsilon$, on a $|u_p - u_n| < \varepsilon/2$. Donc, en fixant $p \geq n_\varepsilon$, pour $n \geq n_\varepsilon$ on a :

$$u_n \in]u_p - \varepsilon/2, u_p + \varepsilon/2[\subset I = [u_p - \varepsilon/2, u_p + \varepsilon/2].$$

On a $\ell(I) = \varepsilon$, ce qui démontre une implication.

Réciproquement, si la propriété “Cauchy par intervalles” est vérifiée, nous prenons $N = N_{\varepsilon/2}$ et l'intervalle I de longueur $\leq \varepsilon/2$ contenant tout u_n lorsque $n \geq N_{\varepsilon/2}$. Si $p \geq N_{\varepsilon/2}$ alors $u_n, u_p \in I$ donc $|u_n - u_p| \leq \ell(I) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$. □

1.III.B. Caractère complet de la droite réelle. — Le théorème suivant est extrêmement important. Il peut s'énoncer en disant que la droite réelle est complète (un espace complet étant, par définition, caractérisé par la convergence de toute suite de Cauchy).

Définition 1.III.5. — Une partie X de $\mathbb{R}$ est *complète* si, pour toute suite de Cauchy (u_n) d'éléments de X, on a que (u_n) converge vers un élément de X.

Le théorème suivant affirme que $\mathbb{R}$ est complet.

Théorème 1.III.6. — *Une suite numérique (u_n) converge ssi elle est de Cauchy.*

Démonstration. — Soit (u_n) convergente et $a \in \mathbb{R}$ sa limite. Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe alors $N = N_\varepsilon$ tel que, pour tout $n \geq N$, on a $|u_n - a| < \varepsilon$. Alors si $p, q \geq N$, on a :

$$|u_q - u_p| = |u_q - a + a - u_p| \leq |u_q - a| + |u_p - a| < 2\varepsilon.$$

Ceci montre que (u_n) est de Cauchy (car ε est arbitraire).

Maintenant nous démontrons que si (u_n) est de Cauchy, alors (u_n) converge. Pour tout k entier non nul, il existe un entier n_k et un intervalle fermé J_k de longueur $\ell(J_k) \leq 1/k$ tels que, si $n \geq n_k$, alors $u_n \in J_k$. Posons :

$$\begin{aligned} &I_1 = J_1, \\ &I_{k+1} = I_k \cap J_{k+1}, && \text{pour } k \geq 1, \\ &N_k = \max\{n_1, \dots, n_k\}. \end{aligned}$$

Si $n \geq N_k$, alors $u_n \in J_1 \cap \cdots \cap J_k = I_k$. Du fait que $I_k \subset J_k$, on obtient $\ell(I_k) \leq 1/k$. De plus, les intervalles I_k forment clairement une suite décroissante d'intervalles emboîtés. D'après le théorème 1.II.7, on obtient un réel c comme unique point dans l'intersection de tous les I_k.

Montrons que $\lim_{n\to\infty} u_n = c$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors k tel que $1/k < \varepsilon$. Pour $n \geq N_k$, on a $u_n \in I_k$ et $\ell(I_k) < \varepsilon$. Comme $c \in I_k$, on a $|u_n - c| < \varepsilon$, donc (u_n) tend vers c. □

Remarque 1.III.7. — La droite rationnelle $\mathbb{Q}$ n'est pas complète. Par exemple, on peut considérer la suite :

$$u_0 = 1, \qquad u_{n+1} = \frac{2u_n + 2}{u_n + 2}.$$

Cette suite est de Cauchy. En effet, elle est majorée par $\sqrt{2}$ et croissante, donc convergente dans $\mathbb{R}$: ainsi elle est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$. Par contre, elle converge vers $\sqrt{2}$, qui n'est pas dans $\mathbb{Q}$.

1.IV. Suites extraites, plus grande limite, valeurs d'adhérence

1.IV.A. Plus petite et plus grande limite. — On commence par définir la plus petite et plus grande limite.

1.IV.A.1. Limite inférieure et supérieure. —

Proposition 1.IV.1. — *Soit (u_n) une suite. Alors il existe un unique $b \in \bar{\mathbb{R}}$ tel que :*

i) pour tout $d > b$, on a $\sharp\{n \in \mathbb{N} \mid u_n > d\} < \infty$;

ii) pour tout $c < b$, on a $\sharp\{n \in \mathbb{N} \mid u_n > c\} = \infty$.

On note alors $b = \limsup_{n\to\infty} u_n$.

Démonstration. — Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on considère :

$$E(x) = \{n \in \mathbb{N} \mid u_n > x\}.$$

Ensuite, on définit :

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \sharp E(x) = \infty\}.$$

Remarquons que, pour $c \leq a$, on $E(a) \subset E(c)$. Donc, $c \leq a$ et $a \in A$ implique $c \in A$.

Nous avons 3 cas :

1. On a $A = \emptyset$. Alors on pose $b = -\infty$ et les conditions sont vérifiées. En effet, tout $d \in \mathbb{R}$ satisfait $d > b$ et $\sharp E(d) < \infty$ i. e. $\sharp\{n \in \mathbb{N} \mid u_n > d\} < \infty$.

   Pour l'unicité, supposons par l'absurde que $b' \neq b$ satisfait les conditions demandées. Alors $b' > b = -\infty$, ainsi on choisit $c \in]-\infty, b'[$ et on a $\sharp E(c) < \infty$, ce qui est une contradiction.

2. On a $A = \mathbb{R}$. On pose alors $b = +\infty$ et les conditions sont vérifiées. En effet, tout $c \in \mathbb{R}$ satisfait $c < b$ et $\sharp E(c) = \infty$ i. e. $\sharp\{n \in \mathbb{N} \mid u_n > d\} = \infty$.

   Pour l'unicité, si on avait $b' \neq b$ satisfaisant les conditions requises, nécessairement $b' < b = +\infty$, de sorte que tout $d \in]b', +\infty[$ satisfait $\sharp E(d) = \infty$, ce qui est absurde.

3. On a $\emptyset \neq A \neq \mathbb{R}$. Alors A est majoré. En effet, soit $c \notin A$. Nous avons vu que, pour tout $a \in A$ on a $c > a$, car $c \leq a$ et $a \in A$ impliquent $c \in A$. Autrement dit, tout élément c de $\mathbb{R} \setminus A$ est un majorant de A. Ainsi on peut poser :

$$b = \sup(A) \in \mathbb{R}.$$

   Si $c < b$, alors comme $b = \sup A$ il existe $a \in A$ tel que $a > c$ (sans quoi b ne serait pas minimal parmi les majorants de A). Ceci montre que $c \in A$ donc $\sharp E(c) = \infty$. Si $d > b$, alors $d \notin A$ car sinon b n'est pas un majorant de A. Donc $\sharp E(d) < \infty$.

   Pour l'unicité de b, si b' est un réel ayant les mêmes propriétés que b, et $b' < b$, il existe un réel x avec $b' < x < b$. Alors $E(x) = \infty$ car $x < b$ et $E(x) < \infty$ car $x > b'$. Ceci est une contradiction. De même on exclut $b < b'$, donc $b = b'$.

□

Remarque 1.IV.2. — En reprenant les cas de la démonstration précédente, on voit que :

1. On a $A = \emptyset$ si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe seulement un nombre fini de valeurs de n telles que $u_n > x$. Ceci veut dire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut trouver N_x tel que, si $n \geq N_x$, alors $u_n \leq x$. Autrement dit $\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$.

   Pour résumer :
   — $\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$ ssi $\limsup_{n\to\infty} u_n = -\infty$.
   — de même, $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$ ssi $\liminf_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

2. On a $A = \mathbb{R}$ si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il y a un nombre infini de valeurs de n telles que $u_n > x$. Ceci arrive si et seulement si (u_n) n'est pas majorée.

   Pour résumer :
   — (u_n) n'est pas majorée ssi $\limsup_{n\to\infty} u_n = +\infty$;
   — de même, (u_n) n'est pas minorée ssi $\liminf_{n\to\infty} u_n = -\infty$.

Exemple 1.IV.3. — Soit $u_n = (-1)^n$. Alors $\limsup_{n\to\infty} u_n = 1$ et $\liminf_{n\to\infty} u_n = -1$. Si $u_n = (-2)^n$ alors $\limsup_{n\to\infty} u_n = +\infty$ et $\liminf_{n\to\infty} u_n = -\infty$.

1.IV.A.2. Infimum des suprema et supremum des infima. — Soit (u_n) une suite numérique. Alors nous définissons deux suites :

$$v_n = \sup\{u_m \mid m \geq n\}, \qquad \text{si } (u_n) \text{ est majorée,} \tag{1}$$

$$w_n = \inf\{u_m \mid m \geq n\}, \qquad \text{si } (u_n) \text{ est minorée.} \tag{2}$$

Remarquons que l'on prend des extrêmes sur des ensembles de plus en plus petits lorsque n augmente. Dans ces circonstances, on a, pour tout n :

$$\begin{aligned} &w_n \leq u_n \leq v_n, && \\ &v_{n+1} \leq v_n, && \text{i. e. } (v_n) \text{ est décroissante,} \\ &w_n \leq w_{n+1} && \text{i. e. } (w_n) \text{ est croissante.} \end{aligned}$$

Lorsque ces suites sont définies dans $\mathbb{R}$, un peut considérer leur limite d'après le théorème 1.II.10, et on a le résultat suivant.

Proposition 1.IV.4. — *Soit (u_n) une suite numérique, et définissons (v_n) et (w_n) par les conditions* (1) *et* (2). *Alors :*

$$\begin{aligned} &\limsup_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n, && \textit{si } (u_n) \textit{ est majorée,} \\ &\liminf_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} w_n, && \textit{si } (u_n) \textit{ est minorée.} \end{aligned}$$

Démonstration. — Soit (u_n) majorée et $b = \lim_{n\to\infty} v_n$. Supposons $b > -\infty$. La preuve dans le cas (u_n) minorée est similaire.

Si $c < b$, alors $c < \inf\{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ donc $c < v_n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c < \sup\{u_m \mid m \geq n\}$, autrement dit il existe $m \geq n$ tel que $u_m > c$. Ceci nous dit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver $m \geq n$ avec $u_m > c$. Donc l'ensemble des $m \in \mathbb{N}$ tels que $u_m > c$ est bien infini.

Si $d > b$, alors $d > \inf\{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $v_N < d$, i. e. $\sup\{u_m \mid m \geq N\} < d$. Donc pour $m \geq N$ on a $u_m < d$. Ainsi, $u_m > d$ seulement pour un nombre fini de valeurs de $m \in \mathbb{N}$, toutes ces valeurs étant inférieures à N.

Enfin si $b = -\infty$ alors pour tout $d \in \mathbb{R}$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $v_N < d$, ce qui veut dire $\sup\{u_m \mid m \geq N\} < d$. Donc, $u_m < d$ quelque soit $m \geq N$, ce qui montre $\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$ donc $\limsup_{n\to\infty} u_n = -\infty$. □

1.IV.A.3. Lien entre la plus petite et plus grande limite et la convergence. —

Proposition 1.IV.5. — *Soit (u_n) une suite numérique. Alors :*

$$\liminf_{n\to\infty} u_n \leq \limsup_{n\to\infty} u_n.$$

Si l'égalité est atteinte, alors :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \limsup_{n\to\infty} u_n = \liminf_{n\to\infty} u_n.$$

Démonstration. — Si (u_n) n'est pas minorée, on a bien entendu $-\infty \leq a$, pour n'importe quel $a \in \overline{\mathbb{R}}$. De plus, $\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$ si et seulement si $\limsup_{n\to\infty} u_n = -\infty$ et dans ce cas aussi $\liminf_{n\to\infty} u_n = -\infty$. De même pour $+\infty$. Les cas infinis étant clairs, on suppose désormais (u_n) bornée.

Posons $b = \limsup_{n\to\infty} u_n$ et $a = \liminf_{n\to\infty} u_n$. Il est clair que $a \leq b$ car $w_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ dans les notations de la proposition 1.IV.4. De plus, si $a = b$ alors u_n converge vers a d'après le théorème de l'encadrement. En effet, les deux suites (v_n) et (w_n) dans ce cas sont adjacentes. □

1.IV.B. Suites extraites. —

Définition 1.IV.6. — Soit (u_n) une suite numérique, et soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante. La suite $(u_{\varphi(n)})$ est appelée une *suite extraite*, ou sous suite, de la suite (u_n). On note souvent $n_k = \varphi(k)$ et $(u_{n_k}) = (u_{\varphi(k)})$.

Exemple 1.IV.7. — Soit (u_n) une suite numérique. Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) des termes paires ou impaires de (u_n) sont des suites extraites de (u_n). De même, la suite tronquée $(u_n)_{n\geq n_0}$, obtenue par $\varphi(n) = n_0 + n$ est une suite extraite de (u_n).

1.IV.B.1. Convergence d'une suite extraite. —

Proposition 1.IV.8. — *Si une suite numérique (u_n) converge vers $a \in \bar{\mathbb{R}}$, alors toute suite extraite de (u_n) converge vers a aussi.*

Démonstration. — Supposons $a \in \mathbb{R}$, le raisonnement pour $a = +\infty$ ou $a = -\infty$ étant analogue. Soit $\varepsilon > 0$ et N_ε tel que pour tout $n \geq N_\varepsilon$ on ait $|u_n - a| < \varepsilon$. Puisque φ est strictement croissante, on a $\varphi(n) \geq n$, donc $|u_{\varphi(n)} - a| < \varepsilon$. Ceci montre que $(u_{\varphi(n)})$ converge aussi vers a. □

1.IV.B.2. Plus petite et plus grande limite d'une suite extraite. —

Proposition 1.IV.9. — *Soit (u_n) une suite numérique et (u_{n_k}) une suite extraite. Alors :*

$$\liminf_{n\to\infty} u_n \leq \liminf_{k\to\infty} u_{n_k} \leq \limsup_{k\to\infty} u_{n_k} \leq \limsup_{n\to\infty} u_n.$$

Démonstration. — Pour tout réel x on considère les ensembles :

$$E(x) = \{n \in \mathbb{N} \mid u_n > x\},$$
$$F(x) = \{k \in \mathbb{N} \mid u_{n_k} > x\}.$$

L'application $k \mapsto n_k$ définit une injection $F(x) \hookrightarrow E(x)$. On considère aussi :

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \sharp E(x) = \infty\},$$
$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid \sharp F(x) = \infty\}.$$

Comme $F(x)$ s'injecte dans $E(x)$, on a $\sharp F(x) \leq \sharp E(x)$, donc $B \subset A$.

Ainsi, A majoré implique B majoré, i. e. $\limsup_{n\to\infty} u_n < +\infty$ implique $\limsup_{k\to\infty} u_{n_k} < +\infty$. De même, $B \neq \emptyset$ implique $A \neq \emptyset$ donc $\limsup_{k\to\infty} u_{n_k} > -\infty$ implique $\limsup_{n\to\infty} u_n > +\infty$.

Enfin, si A et B sont majorés et non vides, on sait que :

$$\limsup_{n\to\infty} u_n = \sup(A),$$
$$\limsup_{k\to\infty} u_{n_k} = \sup(B),$$

d'après la preuve de la proposition 1.IV.1. Donc $B \subset A$ implique :

$$\limsup_{k\to\infty} u_{n_k} = \sup(B) \le \sup(A) = \limsup_{n\to\infty} u_n.$$

La preuve pour la plus petite limite suit le même raisonnement. □

1.IV.C. Valeur d'adhérence. —

1.IV.C.1. Définition de valeur d'adhérence. —

Définition 1.IV.10. — Soit (u_n) une suite numérique et $a \in \mathbb{R}$. On dit que a est une *valeur d'adhérence* de (u_n) si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une nombre infini de valeurs de $n \in \mathbb{N}$ satisfaisant à :

$$|u_n - a| < \varepsilon.$$

Parfois, on dit que $+\infty$ est valeur d'adhérence de (u_n) si (u_n) n'est pas majorée. On dit que $-\infty$ est valeur d'adhérence de (u_n) si (u_n) n'est pas minorée.

Remarque 1.IV.11. — La valeur $a \in \mathbb{R}$ est d'adhérence pour (u_n) ssi pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $m \ge n$ tel que $|u_m - a| < \varepsilon$.

En effet, soit $X = \{m \in \mathbb{N} \mid |u_m - a| < \varepsilon\}$.

- — Si $\sharp X = \infty$ alors, étant fixé $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver $m \in X$ tel que $m \ge n$ (c'est clair car les $m \in X$ tels que $m < n$ sont en nombre fini).
- — Réciproquement, si $\sharp X < \infty$ alors pour $n \ge \max(X) + 1$ il n'existe pas de $m \ge n$ tel que $|u_m - a| < \varepsilon$.

Exemple 1.IV.12. — Soit $(u_n) = (-1)^n$. Alors la suite (u_{2n}) vaut constamment 1 tandis que (u_{2n+1}) vaut -1. Donc 1 et -1 sont valeurs d'adhérence de (u_n). Ce sont an fait les seules valeurs d'adhérence de cette suite.

Exemple 1.IV.13. — Plus généralement, étant donné $0 \neq m \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \cos\left(\frac{2n\pi}{m}\right).$$

Alors (u_n) admet les valeurs d'adhérence :

$$\left\{\cos\left(\frac{2\pi k}{m}\right)\middle| 0 \le k \le \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 1\right\}.$$

1.IV.C.2. Plus petite et plus grande limite comme valeurs d'adhérence. —

Proposition 1.IV.14. — *La plus grande limite et la plus petite limite sont valeurs d'adhérence.*

Démonstration. — Soit (u_n) la suite numérique en question et posons $b = \limsup_{n\to\infty} u_n$.

Si $b = +\infty$, alors (u_n) n'est pas majorée, donc $+\infty$ est valeur d'adhérence de (u_n) par définition.

Si $b = -\infty$, alors $\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$, en particulier (u_n) n'est pas minorée, donc $-\infty$ est valeur d'adhérence de (u_n) par définition.

Il reste à examiner le cas $b \in \mathbb{R}$. On note de nouveau, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$E(x) = \{n \in \mathbb{N} \mid u_n > x\}.$$

Soit alors $\varepsilon > 0$. On a :

$$\sharp E(b-\varepsilon) = \infty;$$
$$\sharp E(b+\tfrac{\varepsilon}{2}) < \infty.$$

On a donc un nombre infini d'entiers n dans $E(b-\varepsilon) \setminus E(b+\varepsilon/2)$, c'est-à-dire d'entiers n tels que :

$$b-\varepsilon < u_n \leq b + \frac{\varepsilon}{2} < b+\varepsilon.$$

Ceci montre que b est valeur d'adhérence de (u_n). Pour la limite inférieure, c'est le même argument. □

1.IV.C.3. Convergences d'une suite extraite et valeur d'adhérence. — Le résultat suivant établit l'équivalence entre l'idée de suite extraite et celle de valeur d'adhérence.

Théorème 1.IV.15. — *Pour que $b \in \overline{\mathbb{R}}$ soit valeur d'adhérence d'une suite numérique (u_n), il faut et il suffit qu'il y ait une suite extraite de (u_n) qui tend vers b.*

Démonstration. — Soit $b \in \mathbb{R}$, et supposons que la suite extraite u_{n_k} converge vers b. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K = K_\varepsilon$ tel que $k \geq K$ implique $|u_{n_k} - b| < \varepsilon$. Donc $|u_n - b| < \varepsilon$ pour une infinité de valeurs de n, i. e. pour n de la forme n_k, avec $k \geq K$.

Si (u_{n_k}) tend vers $+\infty$ alors pour tout $b \in \mathbb{R}$ il existe $K = K_b$ tel que $u_{n_k} \geq b$ pour tous les $k \geq K$. Donc (u_n) n'est pas majorée. De même pour $b = -\infty$.

Montrons maintenant que, si $b \in \mathbb{R}$ est valeur d'adhérence de (u_n), on peut construire une suite extraite de (u_n) convergeant vers b. Prenons $0 \neq k \in \mathbb{N}$. Il existe alors une infinité de valeurs de n telles que :

$$|u_n - b| < \frac{1}{k}.$$

Posons $n_0 = 0$, puis pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$n_{k+1} = \min\left\{n > n_k \,\middle|\, |u_n - b| < \frac{1}{k+1}\right\}.$$

Ceci est bien défini car les entiers n tels que $|u_n - b| < \frac{1}{k+1}$ sont en nombre infini, donc il en existe bien un qui soit strictement plus grand que n_k.

Montrons alors que (u_{n_k}) converge vers b. En effet, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $K \geq 1$ tel que $\frac{1}{K} < \varepsilon$. Donc pour $k \geq K$, on a :

$$\left|u_{n_k} - b\right| < \frac{1}{k} \leq \frac{1}{K} < \varepsilon.$$

Si $b = +\infty$ est valeur d'adhérence de (u_n), alors (u_n) n'est pas majorée. Ainsi pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $u_n \geq k$ pour un nombre infini de valeurs de n. Donc on peut construire de nouveau (u_{n_k}) ayant $u_{n_k} \geq k$. Concrètement on définit $n_0 = 0$ puis pour $k \geq 1$, $n_k = \min\{n > n_{k-1} \mid u_n > k\}$, ce qui est bien posé car il existe un nombre infini de valeurs de $n \in \mathbb{N}$ telles que $u_n \geq k$ donc parmi ces valeurs il en existe qui soit supérieures à n_{k-1}. Ainsi (u_{n_k}) tend vers $+\infty$. Le cas $b = -\infty$ suit le même raisonnement. □

Corollaire 1.IV.16. — *(u_n) une suite numérique, a sa limite inférieure, b sa limite supérieure. Alors $\lim_{n\to\infty} u_n$ existe dans $\bar{\mathbb{R}}$ ssi $a = b$. Dans ce cas on a $\lim_{n\to\infty} u_n = a = b$.*

Démonstration. — Nous avons vu lors de la proposition 1.IV.5 que, si $a = b$ alors $\lim_{n\to\infty} u_n = a = b$.

Il s'agit de montrer que, si $\lim_{n\to\infty} u_n = c$, avec $c \in \bar{\mathbb{R}}$ alors $a = b = c$.

Si $c = +\infty$ alors $\limsup_{n\to\infty} u_n = +\infty$ d'après la remarque 1.IV.2, partie 2, car (u_n) n'est pas majorée. Aussi $\liminf_{n\to\infty} u_n = +\infty$ d'après la remarque 1.IV.2, partie 1. Donc dans ce cas $a = b = c$. De même si $c = -\infty$.

Si $c \in \mathbb{R}$, alors toute suite extraite de (u_n) converge vers c. Comme a et b sont valeurs d'adhérence de (u_n) d'après la proposition 1.IV.14, il existe des suites extraites de (u_n) qui convergent vers a et b, selon le théorème 1.IV.15. Ainsi, $a = c = b$. □

Corollaire 1.IV.17. — *Soit (u_n) une suite numérique, a sa limite inférieure, b sa limite supérieure, c une valeur d'adhérence. Alors $a \leq c \leq b$. En particulier :*

$$a = \min\{c \in \bar{\mathbb{R}} \mid c \textit{ est valeur d'adhérence de } (u_n)\},$$
$$b = \max\{c \in \bar{\mathbb{R}} \mid c \textit{ est valeur d'adhérence de } (u_n)\}.$$

Démonstration. — Si $b = +\infty$, bien sûr $c \leq b$. Si $b = -\infty$, alors $\lim_{n\to\infty} u_n = b$ donc $c = -\infty$ en tant que limite d'une suite extraite de (u_n). De même pour si a n'est pas fini.

On peut désormais supposer a, b finis donc (u_n) bornée et par conséquent c fini. Soit alors (u_{n_k}) une suite extraite qui converge vers c. Le corollaire précédent dit que $c = \lim_{k\to\infty} u_{n_k} = \limsup_{k\to\infty} u_{n_k}$. Ainsi, d'après la proposition 1.IV.9, on a :

$$c = \lim_{k\to\infty} u_{n_k} = \limsup_{k\to\infty} u_{n_k} \leq \limsup_{n\to\infty} u_n = b.$$

Pour a, c'est le même raisonnement. □

1.IV.C.4. Théorème de Bolzano-Weierstrass. — Nous terminons ce chapitre par l'un des résultats les plus connus à propos des suites.

Théorème 1.IV.18. — *Toute suite réelle bornée admet une suite extraite convergente.*

Démonstration. — La limite supérieure est limite d'une suite extraite.

On peut donner une autre preuve. On construit la suite extraite $\varphi : k \mapsto \varphi(k) = n_k$ par dichotomie. Ceci se fait comme suit : on commence par noter $\varphi(0) = 0$, et considérer un minorant a de (u_n) et un majorant b de (u_n) de sorte que, pour tout entier n on ait :

$$a \leq u_n \leq b.$$

Donc $(u_n) \in I_0 = [a, b]$ pour tout n.

Ensuite, on pose $c = 1/2(a + b)$. On regarde les deux ensembles :

$$\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \leq c\},$$
$$\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \geq c\}.$$

Au moins un parmi deux ensembles est infini : on le note N_1 (si les deux le sont, on choisit le premier). On note en conséquence I_1 la moitié de l'intervalle I_0 contenant les u_n pour n appartenant à N_1. La longueur I_1 est bien évidemment la moitié de la longueur de I_0, c'est-à-dire $|a-b|/2$. On définit $\varphi(1)$ comme le plus petit $n > 0$ tel que $u_n \in I_1$.

On poursuit la démonstration en coupant I_1 à la moitié, et en définissant I_2 l'intervalle parmi les deux moitiés de I_1 qui contient un nombre infini de u_n ; de même on pose $\varphi(2)$ comme le plus petit entier $n > \varphi(1)$ tel que $u_n \in I_2$. Cette procédure donne lieu à une suite I_k d'intervalles tels que $I_{k+1} \subset I_k$, avec I_k de longueur $|a-b|/2^k$ et à une suite extraite $(u_{n_k}) = (u_{\varphi(k)})$, avec $u_{n_k} \in I_k$.

Par le principe des intervalles emboîtés, il existe un unique réel $d \in \cap_{k\in\mathbb{N}} I_k$. On voit alors que $\lim_{k\to\infty} u_{n_k} = d$ puisque $u_{n_k} \in I_k$ pour tout k. $\square$

CHAPITRE 2

SÉRIES NUMÉRIQUES

A partir d'ici, presque tout est tiré de [**LFA77**].

2.I. Convergence, critère de Cauchy

2.I.A. Convergence des séries numériques. —

Définition 2.I.1. — Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite numérique. La *somme partielle* à l'ordre n de la série numérique de terme général u_n est la suite (s_n) définie par :

$$s_n = u_0 + \cdots + u_n = \sum_{m\leq n} u_m.$$

On parle alors de la suite (s_n) comme de la *série de terme général* u_n, ou la *série* $\sum u_n$.

2.I.A.1. Convergence d'une série numérique. —

Définition 2.I.2. — On dit que la série numérique $\sum u_n$ *converge vers* $a \in \mathbb{R}$ si la suite (s_n) des sommes partielles converge vers a. Dans ce cas on note :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = a.$$

Si s_n n'a pas de limite, ou si $s_n \to \infty$, alors on dit que $\sum u_n$ diverge.

Exemple 2.I.3. — Considérons un gâteau dont on mangerait d'abord la moitié, puis la moitié de ce qui reste, et ainsi de suite à l'infini. La part que l'on aura mangée au bout de m pas est :

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n} = \frac{2^m - 1}{2^m}.$$

En effet, cette formule est valide pour $m = 1$, et pour $m \geq 2$ par récurrence on a :

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^m} + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^m} + \frac{2^{m-1} - 1}{2^{m-1}} = \frac{2^m - 1}{2^m}.$$

Donc pour $m \to \infty$, on obtient une limite qui vaut 1, i.e. :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Exemple 2.I.4. — Considérons la série dont le terme général u_n est défini par :

$$u_0 = 0, \qquad \text{pour } n \geq 1 : \quad u_n = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Nous avons la formule :

$$\sum_{n=0}^{m} u_n = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{m}{m+1}.$$

En effet, la formule est valide pour $m = 0$ et $m = 1$, puis par récurrence pour $m \geq 2$:

$$\sum_{n=0}^{m} u_n = \sum_{n=0}^{m-1} u_n + \frac{1}{m(m+1)} = \frac{m-1}{m} + \frac{1}{m(m+1)} = \frac{m}{m+1}.$$

La série $\sum u_n$ est donc convergente et :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Remarque 2.I.5. — La suite originaire (u_n) peut être récupérée de (s_n) par les relations $u_0 = s_0$ et $u_n = s_n - s_{n-1}$ pour $n \geq 1$. Donc, à proprement parler, la théorie des séries et celle des suites ne font qu'une seule et même chose.

Remarque 2.I.6. — La convergence d'une série numérique $\sum u_n$ ne dépend que du comportement de u_n *à partir d'un certain rang*, soit pour $n \geq n_0$.

2.I.A.2. Limite nulle du terme général d'une série convergente. —

Proposition 2.I.7. — *Si une série* $\sum u_n$ *converge, alors* $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Démonstration. — Soit $s_n = u_0 + \cdots + u_n$. Puisque $\sum u_n$ converge, la suite (s_n) converge, et il en est de même pour (s_{n+1}). De plus ces deux suites ont évidemment la même limite, c'est-à-dire $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$. Mais $u_n = s_{n+1} - s_n$ pour $n \geq 1$, donc u_n tend vers 0. □

Remarque 2.I.8. — La condition $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ n'est pas suffisante pour que $\sum u_n$ converge. Par exemple, posons :

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

D'après la relation $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = 1$, on voit :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}},$$

donc $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Cependant :

$$u_0 + \cdots + u_n = \sqrt{n+1},$$

donc $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = +\infty$.

2.I.A.3. Exemple clé : la série géométrique. —

Définition 2.I.9. — La série géométrique de terme initial $u_0 \in \mathbb{R}$ et de raison $q \in \mathbb{R}$ est la série de terme général $u_n = u_0 q^n$.

Si $q = 1$ le terme général de la série géométrique est constant et la série diverge de façon évidente dès que $u_0 \neq 0$. Lorsque $q \neq 1$, la somme partielle s_n de la série géométrique de terme initial u_0 et de raison q est :

$$s_n = u_0 + \cdots + u_n = u_0 + \cdots + u_0 q^n = u_0(1 + \cdots + q^n) = u_0 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}. \tag{3}$$

Proposition 2.I.10. — *La série géométrique de terme initial* $0 \neq u_0 \in \mathbb{R}$ *et de ratio* $q \in \mathbb{R}$ *:*

i) converge vers $\frac{u_0}{1-q}$ *si* $|q| < 1$ *;*

ii) diverge si $|q| \geq 1$.

Démonstration. — D'après (3), on voit que la somme partielle s_n de notre série géométrique satisfait $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{u_0}{1-q}$ si $|q| < 1$. Si $|q| > 1$, de nouveau (3) indique que la série géométrique diverge. En effet, la suite extraite s_{2n+1} tend vers $+\infty$.

Le cas $q = 1$ est évident. Si $q = -1$, la somme partielle s_n de la série géométrique est égale à u_0 si n est pair, et à 0 si n est impair. Donc s_n n'a pas de limite. □

2.I.B. Critère de Cauchy. —

***Proposition 2.I.11* (Critère de Caucy).** — *La série numérique* $\sum u_n$ *converge si et seulement si, pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* N_ε *tel que, pour tout* $n \geq N_\varepsilon$ *et tout entier* p *on ait :*

$$\left| u_{n+1} + \cdots + u_{n+p} \right| < \varepsilon.$$

Démonstration. — C'est une application immédiate du théorème 1.III.6. En effet, la différence entre la somme partielle au rang $n + p$ et celle au rang n vaut, en valeur absolue, précisément $\left|\sum_{i=n+1}^{n+p} u_i\right|$. □

Exemple 2.I.12. — On considère la série harmonique :

$$\sum_n \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Utilisons Cauchy pour montrer que cette série diverge. Notons $u_n = 1/n$. Supposons par l'absurde qu'elle soit convergente et soit $\varepsilon < 1/2$. Fixons N et $n \geq N$ donc $2n \geq N$. On a :

$$|u_{n+1} + \cdots + u_{2n}| = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \geq \varepsilon.$$

2.I.C. Opérations sur les séries. — La proposition suivante munit l'ensemble des séries convergentes d'une structure d'espace vectoriel. Attention le produit est plus délicat.

Proposition 2.I.13. — *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries, avec $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = a \in \mathbb{R}$. Alors :*

i) si $\sum v_n$ converge et sa somme vaut b alors $\sum(u_n+v_n)$ converge et sa somme vaut $a+b$;

ii) si $\sum v_n$ diverge alors $\sum(u_n+v_n)$ diverge ;

iii) pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\sum \lambda u_n$ converge vers λa.

La preuve est évidente.

2.II. Séries à termes positifs

Le résultat suivant est évident mais important.

Proposition 2.II.1. — *Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée.*

Démonstration. — La série converge si et seulement si la suite des sommes partielles est convergente, par définition. Mais celle-ci est une suite croissante (car $u_n \geq 0$), elle est donc convergente si et seulement si elle est majorée. □

2.II.A. Comparaison de séries. —

2.II.A.1. Comparaison par inégalité. —

Proposition 2.II.2. — *Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs avec $u_n \leq v_n$, $\forall n$.*

i) Si $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ converge aussi et :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} v_n.$$

ii) Si $\sum u_n$ diverge, v_n diverge aussi.

Démonstration. — Notons s_n la somme partielle $\sum_{m\leq n} u_m$ et $t_n = \sum_{m\leq n} v_m$. Comme (u_n) est à termes positifs, (s_n) est croissante, donc convergente à partir du moment que (s_n) est majorée. Puisque $u_m \leq v_m$, on a pour tout n, $s_n \leq t_n$. Mais (t_n) converge, elle est donc bornée (et donc majorée) : (s_n) est ainsi majorée. De plus, la limite de (s_n) vaut au plus la limite de (t_n), d'après le théorème de comparaison pour les suites numériques. Par contraposée, on en déduit que, si $\sum u_n$ diverge, $\sum v_n$ diverge. □

Remarque 2.II.3. — Dans la proposition précédente, si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, la convergence de $\sum v_n$ entraîne aussi celle de $\sum u_n$, mais sans l'inégalité des sommes. L'énoncé (ii) reste valide.

2.II.A.2. Comparaison par équivalence. —

Proposition 2.II.4. — *Soit (u_n) et (v_n) suites numériques positives équivalentes. Alors les séries de termes généraux u_n et v_n sont de même nature.*

Démonstration. — Bien sûr il suffit considérer les séries à partir d'un certain rang, autrement dit on peut modifier arbitrairement les premiers termes des séries en question sans perte de généralité. Soit (λ_n) convergente vers 1 avec $u_n = (\lambda_n)v_n$ à partir d'un certain rang : nous pouvons supposer que ce rang soit 0 i. e. $u_n = \lambda_n v_n$ pour tout n. Puis, pour tout ε positif, que l'on choisira dans $]0,1[$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que, quelque soit $n \geq N_\varepsilon$, $|\lambda_n - 1| < \varepsilon$, ce qui implique :

$$(1-\varepsilon)v_n \leq u_n \leq (1+\varepsilon)v_n.$$

De $u_n \leq (1+\varepsilon)v_n$ on déduit que, si $\sum v_n$ converge, d'après la proposition 2.II.2, $\sum u_n$ converge aussi.

Comme on a supposé $\varepsilon < 1$, de $(1-\varepsilon)v_n \leq u_n$ on déduit que, si $\sum u_n$ converge, alors $\sum (1-\varepsilon)v_n$ converge ; il en est alors de même pour $\sum v_n$. □

Remarque 2.II.5. — On peut aussi dire que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ à termes positifs ont même nature si $\frac{u_n}{v_n}$ est défini à partir d'un certain rang et tend vers $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si en revanche cette limite est 0, alors la convergence de $\sum v_n$ entraîne celle de $\sum u_n$.

Exemple 2.II.6. — Le terme général de la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est équivalent à $\frac{1}{n(n+1)}$, et cette série est convergente. Donc $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente aussi.

2.II.B. Série de Riemann. — Étant donnés un réel $b > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit :

$$b^\alpha = e^{\alpha \ln(b)}.$$

Cette formule est cohérente si l'on prend l'exponentielle de :

$$\ln(b^\alpha) = \alpha \ln(b).$$

Ceci s'étend évidemment à $b = 0$ auquel cas $b^\alpha = 0$, sauf pour $0^0 = 1$.

Définition 2.II.7. — Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La *série de Riemann* d'exposant α est :

$$\sum_n \frac{1}{n^\alpha}.$$

Si $\alpha = 1$, nous avons appelé la série de Riemann *série harmonique*. Il s'agit d'une série divergente.

Théorème 2.II.8. — *La série de Riemann $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.*

Démonstration. — Nous avons déjà vu lors des exemples 2.I.12 et 2.II.6 que la série de Riemann est divergente pour $\alpha = 1$, donc pour tout $\alpha \leq 1$, et convergente pour $\alpha = 2$, donc pour tout $\alpha \geq 2$. Passons donc à étudier la région $1 < \alpha < 2$.

On définit la série $\sum_{n\geq 1} v_n$ de terme général :

$$v_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}.$$

Il s'agit d'une série à termes positifs, i. e. on a $v_n \geq 0$. Ceci est clair puisque la suite $(\frac{1}{n^{\alpha-1}})$ est évidemment décroissante pour $\alpha > 1$.

Maintenant on considère la fonction de variable réelle :

$$f(x) = \frac{1}{x^{\alpha-1}},$$

définie et strictement décroissante (toujours pour $\alpha > 1$) sur la demi droite $]0, +\infty[$. Sa dérivée première vaut :

$$f'(x) = \frac{1-\alpha}{x^{\alpha}},$$

On applique le théorème des accroissements finis à f sur l'intervalle $[n, n+1]$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On trouve alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, un nombre réel $x_n \in]n, n+1[$ tel que :

$$f'(x_n) = \frac{f(n+1) - f(n)}{n+1-n},$$

ce qui s'écrit :

$$\frac{1-\alpha}{x_n^{\alpha}} = \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} = -v_n.$$

Autrement dit :

$$v_n = (\alpha - 1)x_n^{-\alpha}. \tag{4}$$

Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in]n, n+1[$, i.e. $n < x_n < n+1$ on a $1 < \frac{x_n}{n} < \frac{n+1}{n}$ donc :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = 1.$$

On a alors, en posant $u_n = n^{-\alpha}$, la limite :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n^{-\alpha}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^{-\alpha}}{n^{-\alpha}} = 1.$$

Par (4), on obtient donc :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\alpha-1)x_n^{-\alpha}}{n^{-\alpha}} = \alpha - 1.$$

Ainsi la convergence de $\sum u_n$ et celle de $\sum v_n$ sont équivalentes pour $\alpha > 1$.

D'autre part, $\sum v_n$ est convergente, car :

$$\begin{aligned} v_1 + \cdots + v_n &= \left(1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}\right) + \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}} - \frac{1}{3^{\alpha-1}}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right) = \\ &= 1 - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}, \end{aligned}$$

ce qui tend vers 1 lorsque n tend vers ∞. □

On verra que l'on peut définir b^{α} même si $\alpha \in \mathbb{C}$, et que la série de Riemann d'exposant $\alpha \in \mathbb{C}$ converge si et seulement si $\mathfrak{Re}(\alpha) > 1$.

2.II.C. Règles de convergence. — Nous allons établir deux règles classiques de convergence des séries positives : la règle de Cauchy et celle de d'Alembert. Les deux portent sur une limite du terme général u_n d'une série positive : l'une sur sa racine n-ième, l'autre sur son rapport avec u_{n+1}, et permettent de conclure si cette limite est plus grande ou plus petite que 1. Si cette limite vaut 1, on ne retire aucune information de ces deux règles.

2.II.C.1. Règle de Cauchy. —

Proposition 2.II.9 **(Règle de Cauchy).** — *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs et soit :*

$$b = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} \in [0, +\infty].$$

1. *Si $b < 1$, alors $\sum u_n$ converge.*
2. *Si $b > 1$, alors $\sum u_n$ diverge.*

Démonstration. — Supposons $b > 1$. Alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $1 < c < b$. Donc il existe un nombre infini de valeurs de n telles que :

$$\sqrt[n]{u_n} > c,$$

et donc :

$$u_n > c^n.$$

Il est donc clair que (u_n) n'est pas bornée (donc ne converge pas vers 0), ainsi $\sum u_n$ diverge d'après la proposition 2.I.7.

Par contre si $b < 1$, alors il existe $d \in \mathbb{R}$ tel que $b < d < 1$. Donc l'ensemble des entiers n tels que $\sqrt[n]{u_n} > d$ est fini. Ainsi, il existe un certain rang N tel que :

$$n \geq N \Rightarrow u_n \leq d^n.$$

La convergence de la série $\sum u_n$ est alors assurée par la convergence de la série géométrique $\sum d^n$, d'après les propositions 2.I.10 et 2.II.2. □

2.II.C.2. Règle de d'Alembert. —

Proposition 2.II.10 **(Règle de d'Alembert).** — *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, et supposons $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang. Soit :*

$$a = \liminf_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n},$$
$$b = \limsup_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

1. *Si $b < 1$, alors $\sum u_n$ converge.*
2. *Si $a > 1$, alors $\sum u_n$ diverge.*

On ne peut pas conclure si $(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ n'a pas de limite, ou si $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

Démonstration. — On peut supposer sans modification essentielle de l'énoncé que $u_n \neq 0$ quel que soit n.

Supposons $b < 1$ et soit $d \in \mathbb{R}$ avec $b < d < 1$. D'après la définition de la limite supérieure, cf. proposition 1.IV.1, le nombre de valeurs de n telles que $\frac{u_{n+1}}{u_n} > d$ est alors fini. Donc il existe un rang N tel que, pour tout $n \geq N$, on aura :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq d.$$

Ainsi, pour $p \geq 0$ on aura :

$$\frac{u_{N+p}}{u_N} = \frac{u_{N+p}}{u_{N+p-1}} \frac{u_{N+p-1}}{u_N} \leq d \frac{u_{N+p-1}}{u_N} \leq d \frac{u_{N+p-1}}{u_{N+p-2}} \frac{u_{N+p-2}}{u_N} \leq d^2 \frac{u_{N+p-2}}{u_N} \leq \cdots \leq d^p.$$

On a alors :

$$u_{N+p} \leq d^p u_N,$$

donc $\sum u_n$ converge d'après la proposition 2.II.2, car elle est majorée, à partir d'un certain rang, par une suite géométrique convergence, cf. proposition 2.I.10.

Sinon, supposons $a > 1$. Il existe alors un réel c tel que $1 < c < a$. Donc il existe seulement un nombre fini de valeurs de n telles que $\frac{u_{n+1}}{u_n} < c$, i. e. $u_{n+1} \geq c u_n$ à partir d'un certain rang, disons N. Ainsi pour $p \geq 0$ on a

$$u_{p+N} \geq c^p u_N,$$

ainsi u_n ne tend pas vers 0 donc $\sum u_n$ diverge. □

Exemple 2.II.11. — Étudier la série de terme général $u_n = (\frac{2n+1}{3n+5})^{n/2}$. Cette série est bien sûr à termes positifs, et on a :

$$\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\frac{2n+1}{3n+5}^{n/2}} = \sqrt{\frac{2n+1}{3n+5}},$$

ce qui tend vers $\sqrt{2/3} < 1$, donc la série $\sum u_n$ converge par la règle de Cauchy.

Exemple 2.II.12. — Étudier la série (positive) de terme général $u_n = \frac{n!}{n^n}$. On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

Cette suite tend vers $\frac{1}{e} < 1$, donc $\sum u_n$ est convergente par la règle de d'Alembert.

2.II.D. Produit de séries positives. —

Théorème 2.II.13. — *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ séries positives convergentes et posons :*

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

Alors $\sum w_n$ est convergente et :

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right).$$

Démonstration. — On écrit w_n sous la forme :

$$w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q.$$

Donc la somme partielle de la série $\sum w_n$ est :

$$\sum_{k=0}^{n} w_k = \sum_{0\le p+q\le n} u_p v_q.$$

Notons s_n et t_n les sommes partielles au rang n de $\sum u_n$ et $\sum v_n$. On a :

$$s_n t_n = \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{n} u_p v_q.$$

Si $p+q \le n$, alors $p \le n$ et $q \le n$. Par ailleurs $p \le n$ et $q \le n$ impliquent $p+q \le 2n$. Il est alors clair que :

$$\sum_{k=0}^{n} w_k \le s_n t_n \le \sum_{k=0}^{2n} w_k.$$

De ces inégalités on déduit que $\sum w_n$ est bornée donc convergente, et que la somme de la série $\sum w_n$ converge vers $\lim_{n\to\infty} s_n t_n$, c'est-à-dire vers le produit $(\sum_{n=0}^{\infty} u_n)(\sum_{n=0}^{\infty} v_n)$. □

Remarque 2.II.14. — Attention le résultat est faux pour séries à termes de signe variable, comme on verra dans l'exemple 2.III.10.

2.III. Séries à termes de signe quelconque

Nous allons voir que, lorsque le signe du terme général n'est pas déterminé à priori, la convergence d'une série devient un sujet beaucoup plus délicat.

2.III.A. Convergence absolue et convergence simple. — Le premier système pour établir la convergence d'une série quelconque est de se ramener au cas des séries à termes positifs.

Définition 2.III.1. — On dit que la série $\sum u_n$ *converge absolument* si $\sum |u_n|$ converge.

Proposition 2.III.2. — *Une série $\sum u_n$ absolument convergente converge. De plus :*

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right| \le \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|.$$

Démonstration. — Posons :

$$s_n = \sum_{m\le n} u_n, \qquad t_n = \sum_{m\le n} |u_n|.$$

Étant donnés $n, p \in \mathbb{N}$, on a, par l'inégalité triangulaire :

$$|s_{n+p} - s_n| = \left|u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}\right| \le |u_{n+1}| + \cdots + \left|u_{n+p}\right| = t_{n+p} - t_n.$$

La suite (t_n) converge, donc elle est de Cauchy d'après le théorème 1.III.6 du chapitre 1. D'après l'inégalité précédente, ceci implique que (s_n) est aussi de Cauchy, donc convergente de nouveau d'après théorème 1.III.6 du chapitre 1. La série $\sum u_n$ est donc convergente, et d'après l'inégalité triangulaire on a bien sûr $|s_n| \leq t_n$, donc :

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|.$$

□

Proposition 2.III.3. — *Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ série numériques absolument convergentes et posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_n v_{n-k}$. Alors $\sum w_n$ est absolument convergente et*

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right).$$

Démonstration. — Comme $\sum |u_n|$ et $\sum |v_n|$ sont positives et convergentes, si on pose $z_n = \sum_{k=0}^{n} |u_k||v_{n-k}|$ nous avons $\sum z_n$ convergente et :

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} |v_n|\right).$$

Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_\varepsilon$ implique :

$$\left|\sum_{k=0}^{n} z_k - \left(\sum_{i=0}^{n} |u_i|\right)\left(\sum_{j=0}^{n} |v_j|\right)\right| < \varepsilon.$$

Mais nous avons :

$$\left|\sum_{k=0}^{n} w_k - \left(\sum_{i=0}^{n} u_i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} v_j\right)\right| = \left|\sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n \\ i+j \geq n+1}} u_i v_j\right| \leq$$

$$\leq \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n \\ i+j \geq n+1}} |u_i v_j| = \left|\sum_{k=0}^{n} z_k - \left(\sum_{i=0}^{n} |u_i|\right)\left(\sum_{j=0}^{n} |v_j|\right)\right| < \varepsilon,$$

pour tout $n \geq n_\varepsilon$. Ainsi l'énoncé est démontré. □

2.III.B. Série alternées. —

Définition 2.III.4. — Une série $\sum u_n$ est *alternée* si elle est de la forme :

$$\sum (-1)^n u_n,$$

avec u_n de signe constant.

Théorème 2.III.5. — *Une série alternée $\sum (-1)^n u_n$, telle que la suite (u_n) est positive décroissante vers 0, est convergente.*

Lemme 2.III.6. — *Soit* (x_n) *une suite numérique et supposons que :*

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = a \in \mathbb{R}$$

Alors $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Démonstration. — Soit un $\varepsilon > 0$. Il existe n_1 et n_2 naturels tels que :

$$n \geq n_1 \Rightarrow |x_{2n+1} - a| < \varepsilon,$$
$$n \geq n_1 \Rightarrow |x_{2n} - a| < \varepsilon.$$

Donc soit $n_0 = \max(2n_1 + 1, 2n_2)$ et $m \geq n_0$. Si m est pair donc $m = 2n$ on a $2n \geq n_0 \geq 2n_2$ i. e. $n \geq n_2$ donc $|x_m - a| = |x_{2n} - a| < \varepsilon$. Par contre si m est impair donc $m = 2n+1$ alors $2n + 1 \geq n_0 \geq 2n_1 + 1$ implique $n \geq n_1$ donc $|u_m - a| = |x_{2n+1} - a| < \varepsilon$. Dans tous les cas $|x_m - a| < \varepsilon$ donc (x_m) converge vers a.

□

Démonstration du théorème 2.III.5. — Nous considérons la somme partielle $U_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$ et ses termes pair $v_n = U_{2n}$ et impairs $w_n = U_{2n+1}$. On a, quel que soit $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
&w_n \geq w_{n-1}, &&\text{donc } (w_n) \text{ est croissante,}\\
&v_n \leq v_{n-1}, &&\text{donc } (v_n) \text{ est décroissante,}\\
&w_n \leq v_n.
\end{aligned}$$

En effet $w_n - w_{n-1} = -u_{2n+1} + u_{2n} \geq 0$ et $v_n - v_{n-1} = u_{2n} - u_{2n-1} \leq 0$ car (u_n) est décroissante et $w_n - v_n = -u_{2n+1} \leq 0$ puisque (u_n) est positive. De plus $w_n - v_n = -u_{2n+1}$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, par hypothèse. Autrement dit, (w_n) et (v_n) sont adjacentes, ainsi elles convergent vers la même limite a.

Les termes pairs et impairs de U_n convergent vers a. Pour conclure, on utilise le lemme précédent qui affirme que, si les termes pairs et impairs d'une suite $(x_n) = (U_n)$ convergent vers a alors la suite elle-même converge vers a.

□

Définition 2.III.7. — Une série numérique est *semiconvergente* si elle est convergente mais pas absolument convergente.

Exemple 2.III.8. — La série harmonique alternée :

$$\sum (-1)^n \frac{1}{n}$$

est semiconvergente. En effet, nous avons vu lors de l'exemple 2.I.12 qu'elle n'est pas convergente, et par application du théorème 2.III.5, cette série est clairement convergente.

Exemple 2.III.9. — Considérons :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}.$$

Nous allons montrer $\sum u_n$ est divergente, ceci étant dû au fait que u_n n'est pas une série alternée, autrement dit $\frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ n'est pas décroissante. Pour montrer que $\sum u_n$ diverge, nous pouvons la comparer à la série

$$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}},$$

convergente d'après le théorème 2.III.5. La différence est :

$$\begin{aligned} w_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \\ = (-1)^n \frac{(\sqrt{n}+(-1)^n) - \sqrt{n}}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+(-1)^n)} = \frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}, \end{aligned}$$

ce qui donne une série à termes positifs, de terme général équivalent à $1/n$ pour $n \to \infty$, donc une série divergente.

Remarquons que ceci offre un exemple de deux séries, à termes de signe non constant, qui sont équivalentes, et pourtant pas de même nature :

$$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \qquad \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}.$$

Exemple 2.III.10. — Prenons :

$$u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}.$$

Nous avons alors la série produit :

$$w_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n+1-k)}}.$$

Or la fonction $f : y \mapsto (y+1)(n+1-y)$ définie sur $\mathbb{R}$ admet un maximum en $y = n/2$, ce que l'on voit facilement en prenant la dérivée première de f. Ainsi $f(y) \leq f(n/2) = (\frac{n}{2}+1)^2$. En passant au dénominateur et en prenant la racine on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n+1-k)}} \geq \frac{n+1}{n/2+1}.$$

Cette quantité ne converge pas vers 0 lorsque n tend vers l'infini, donc $\sum w_n$ diverge.

2.III.C. Transformée d'Abel. — La transformée d'Abel est un outil puissant, qui généralise le théorème de convergence des séries alternées. La transformée d'Abel peut être utilisée pour des séries réelles et complexes (nous énonçons ici seulement le premier cas).

Théorème 2.III.11. — *Soit $\sum u_n$ une série numérique. Si on a $u_n = a_n b_n$ de sorte que :*
— *la suite (b_n) soit positive et décroissante vers 0 ;*
— *il existe M tel que $|\sum_{k\leq n} a_k| \leq M$ pour tout n.*
Alors $\sum u_n$ est convergente.

Démonstration. — Pour la démonstration, nous regroupons (la *transformée* d'Abel proprement dite) les termes de la somme partielle $U_n = u_0 + \cdots + u_n$ de sorte à faire apparaître les différences $b'_n = b_{n+1} - b_n$. On note $A_n = a_0 + \cdots + a_n$. Il faut penser à la formule de l'intégrale par parties $\int ab = Ab - \int Ab'$ où $A = \int a$ est une primitive de a, en échangeant $\int$ et $\sum$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons la relation :

$$U_n = A_n b_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b'_k. \tag{5}$$

Pour la démontrer, faisons une récurrence sur n. Pour $n = 0$, les deux termes valent $a_0 b_0$ car $A_{-1} = 0$. Supposons alors la relation valide au rang n et montrons la au rang $n+1$:

$$\begin{aligned} U_{n+1} = U_n + a_{n+1} b_{n+1} &= A_n b_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b'_k + a_{n+1} b_{n+1} = \\ &= A_n b_n - \sum_{k=0}^{n} A_k b'_k + A_n b'_n + a_{n+1} b_{n+1} = \\ &= A_n b_n - \sum_{k=0}^{n} A_k b'_k + A_n (b_{n+1} - b_n) + a_{n+1} b_{n+1} = \\ &= A_n b_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} A_k b'_k + a_{n+1} b_{n+1} = \\ &= (A_n + a_{n+1}) b_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} A_k b'_k = A_{n+1} b_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} A_k b'_k. \end{aligned}$$

Or, (A_n) étant bornée et (b_n) convergeant vers 0, on voit que la limite de U_n existe finie, lorsque n tend vers l'infini, si et seulement si $\sum A_n b'_n$ converge. Mais $\sum A_n b'_n$ est même absolument convergente, en effet :

$$|A_n b'_n| \leq M |b_n - b_{n+1}| = M(b_n - b_{n+1}),$$

puisque (b_n) est décroissante. De plus $\sum (b_n - b_{n+1})$ est convergente, car sa somme partielle au rang m vaut :

$$(b_0 - b_1) + (b_1 - b_2) + \cdots + (b_m - b_{m+1}) = b_0 - b_{m+1},$$

ce qui tend vers b_0 lorsque m tend vers ∞. Par la proposition 2.II.2, $\sum A_n b'_n$ est donc absolument convergente. □

2.IV. Sommations par paquets, changements d'ordre

2.IV.A. Groupement des termes d'une série. — Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante, et soir $\sum u_n$ une série numérique. On considère alors la suite (v_n)

définie de la manière suivante :

$$v_0 = \sum_{k=0}^{\varphi(0)} u_k, \qquad v_n = \sum_{k=1+\varphi(n-1)}^{\varphi(n)} u_k, \quad \text{pour } n \geq 1. \tag{6}$$

La série $\sum v_n$ correspond à une somme par blocs des termes u_n, l'intervalle des indices intervenant dans chaque bloc étant fixé par φ.

Proposition 2.IV.1. — *Soit $\sum u_n$ une série numérique, $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante, et définissons la série $\sum v_n$ comme dans* (6).

i) Si la série $\sum u_n$ converge, alors $\sum v_n$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} v_n.$$

ii) Si $u_n \geq 0$ pour tout n, et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

Démonstration. — On note s_n la somme $u_0 + \cdots + u_n$. On a :

$$v_0 + \cdots + v_n = u_0 + \cdots + u_{\varphi(n)} = s_{\varphi(n)}.$$

Donc si (s_n) converge, la suite extraite $(s_{\varphi(n)})$ converge aussi vers la même limite. Ceci démontre (i).

Pour montrer (ii), on remarque que pour tout n on a $n \leq \varphi(n)$, sans quoi φ ne saurait être strictement croissante. Donc, comme les u_n sont réels non négatifs, on a $s_n \leq s_{\varphi(n)}$. Or si $(s_{\varphi(n)})$ converge, forcément $(s_{\varphi(n)})$ est bornée, donc (s_n) aussi. Par suite (s_n) converge, et (ii) est prouvé. □

Remarque 2.IV.2. — Si $\sum u_n$ est divergente de signe non constant, il peut arriver que $\sum v_n$ soit convergente. Un exemple tout simple est $u_n = (-1)^n$. Évidemment, si on groupe les termes u_n deux par deux (donc par $\varphi(n) = 2n$), on obtient $v_n = 0$.

2.IV.B. Changement de l'ordre des termes d'une série. — Soit σ une permutation de $\mathbb{N}$, c'est-à-dire une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Étant donnée une série numérique $\sum u_n$, on considère la série $\sum u_{\sigma(n)}$, obtenue par changement de l'ordre des termes de $\sum u_n$ suivant la permutation σ.

Définition 2.IV.3. — On dit que u_n est *commutativement convergente* si, pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est convergente.

Théorème 2.IV.4. — *Une série numérique $\sum u_n$ est commutativement convergente si et seulement si elle converge absolument. Dans ce cas, pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$ on a :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)}.$$

Démonstration. — Nous montrons d'abord que, si $\sum u_n$ est absolument convergente, alors quel que soit σ la permutation de $\mathbb{N}$ choisie, la série de terme général $v_n = u_{\sigma(n)}$ est absolument convergente. Pour le faire, on définit pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mu(n) = \max_{k \leq n} \sigma(k).$$

Donc $\mu(n)$ indique la plus grande valeur atteinte par $\sigma(k)$ lorsque k est dans $[0, n]$. En particulier $\mu(n) \geq n$, puisque σ est une bijection. Donc $\lim_{n\to\infty} \mu(n) = +\infty$. On pose :

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|.$$

Ensuite nous remarquons :

$$|v_0| + \cdots + |v_n| = |u_{\sigma(0)}| + \cdots + |u_{\sigma(n)}| \leq |u_0| + \cdots + |u_{\mu(n)}| \leq a.$$

Donc la suite des sommes partielles $|v_0| + \cdots + |v_n|$ est bornée par a, et (v_n) est absolument convergente. Il s'ensuit aussi que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |v_n| \leq a.$$

En utilisant σ^{-1}, on montre l'inégalité inverse. On en déduit l'égalité entre a et la somme de la série $\sum |v_n|$.

Maintenant on montre que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont la même somme. Pour le faire on définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble :

$$\Delta_n = \{0, \ldots, \mu(n)\} \setminus \{\sigma(0), \ldots, \sigma(n)\}.$$

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left| \sum_{k=0}^{\mu(n)} u_k - \sum_{k=0}^{n} v_k \right| = \left| \sum_{k \in \Delta_n} u_k \right| \leq \sum_{k \in \Delta_n} |u_k| = \sum_{k=0}^{\mu(n)} |u_k| - \sum_{k=0}^{n} |v_k|.$$

Puisque $\lim_{n\to\infty} \mu(n) = +\infty$, et $\sum_{k=0}^{\infty} |u_k| = \sum_{k=0}^{\infty} |v_k|$, nous déduisons par passage à la limite dans l'inégalité précédente :

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \sum_{k=0}^{\infty} v_k.$$

Il reste à démontrer que, si la série $\sum u_n$ est commutativement convergente, alors elle est absolument convergente. Par contraposée, on peut montrer que, si $\sum u_n$ est semiconvergente, alors l'on peut trouver une permutation σ de $\mathbb{N}$ telle que la série v_n de terme général $u_{\sigma(n)}$ est divergente. Nous définissons alors :

$$u_n^+ = \max(u_n, 0), \qquad u_n^- = -\min(u_n, 0).$$

Remarquons que $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$, et puisque $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente, au moins l'une des séries positives $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ doit être divergente. En fait $u_n = u_n^+ - u_n^-$ et $\sum u_n$ converge, donc $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont toutes deux divergentes du moment qu'une d'elles diverge. Nous avons donc $\sum_{n=0}^{\infty} u_n^+ = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^- = +\infty$.

Définissons aussi les applications strictement croissantes $\varphi, \psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ suivantes :

$$\varphi(0) = \min\{k \geq 0 \mid u_k > 0\}, \qquad \text{pour } n \geq 1 : \quad \varphi(n) = \min\{k > \varphi(n-1) \mid u_k > 0\},$$
$$\psi(0) = \min\{k \geq 0 \mid u_k \leq 0\}, \qquad \text{pour } n \geq 1 : \quad \psi(n) = \min\{k > \psi(n-1) \mid u_k \leq 0\}.$$

Observons que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe soit un unique $q \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi(q) = p$ (si $u_p > 0$), soit un unique $q \in \mathbb{N}$ tel que $\psi(q) = p$ (si $u_p \leq 0$). En effet, d'abord l'unicité est évidente car φ et ψ sont strictement croissantes.

Quant à l'existence, par exemple si $u_p > 0$ on considère $M = \{k \in \mathbb{N} \mid \varphi(k) \leq p\}$. On a que M est non vide car $0 \in M$, du fait que $\varphi(0)$ est le minimum des entiers k tels que $u_k > 0$, donc ce minimum est au plus p car $u_p > 0$. Aussi, M est majoré car φ est strictement croissante. Donc M étant une partie majorée non vide de $\mathbb{N}$, elle admet un maximum q. Bien sûr $\varphi(q) \leq p$ car $q \in M$, on veut voir que $\varphi(q) \geq p$. On sait que $\varphi(q+1) \geq p+1$, et que $\varphi(q+1) = \min\{k > \varphi(q) \mid u_k > 0\}$. Donc si $p > \varphi(q)$, comme $u_p > 0$ on aurait $\varphi(q+1) \leq p$, ce qui est absurde. On a montré l'existence.

Finalement, nous définissons les suites (z_n) et (w_n) par :

$$z_n = u_{\varphi(n)}, \qquad w_n = -u_{\psi(n)},$$

donc (z_n) est la suite des u_n positifs, tandis que $(-w_n)$ est la suite des u_n négatifs ou nuls. Puisque $\sum u_n^+$ diverge, $\sum z_n$ diverge aussi, en effet (z_n) est obtenue en supprimant les termes nuls de (u_n^+).

Maintenant, puisque $\sum z_n$ diverge, il existe un entier n tel que :

$$z_0 + \cdots + z_n \geq w_0.$$

Nous posons n_0 pour le plus petit parmi ces entiers. L'entier n_1 est le plus petit entier $m > n_0$ satisfaisant :

$$z_0 + \cdots + z_m \geq 1 + w_0 + w_1.$$

On suit ce procédé en définissant n_k comme le plus petit entier $m > n_{k-1}$ tel que :

$$z_0 + \cdots + z_m \geq k + w_0 + \cdots + w_k, \tag{7}$$

l'existence de tous les entiers (n_k) étant assurée par la divergence de $\sum z_n$. Définissons la suite :

$$(y_m) = z_0, \ldots, z_{n_0}, -w_0, z_{n_0+1}, \ldots, z_{n_1}, -w_1, \ldots$$

Nous avons alors, d'après (7) :

$$\sum_{m=0}^{k+n_k+1} y_m = \sum_{j=0}^{n_k} z_j - \sum_{i=0}^{k} w_i \geq k.$$

Ceci implique que $\sum y_m$ diverge. Par ailleurs, nous avons dit que pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe soit un unique $q \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi(q) = p$ (si $u_p > 0$), soit un unique $q \in \mathbb{N}$ tel que $\psi(q) = p$ (si $u_p \leq 0$). Ceci équivaut à dire que la série $\sum y_m$ s'obtient en réordonnant les termes de $\sum u_n$. La preuve est donc terminée. $\square$

CHAPITRE 3

SÉRIES ENTIÈRES

3.I. Suites et séries complexes

3.I.A. Suites à valeurs complexes. —

3.I.A.1. Voisinage dans le plan complexe. —

Définition 3.I.1. — Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $\delta > 0$. Un *disque ouvert* est la partie de $\mathbb{C}$:

$$D(z_0, \delta) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \delta\}.$$

Un *disque fermé* est :

$$\bar{D}(z_0, \delta) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq \delta\}.$$

Le cercle centré en z_0 et de rayon δ est :

$$C(z_0, \delta) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = \delta\}.$$

Pour les disques et le cercle centrés en 0, nous abrégerons :

$$D(\delta) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \delta\},$$
$$\bar{D}(\delta) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \delta\},$$
$$C(\delta) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \delta\}.$$

Le *disque épointé* $D^*(\zeta_0, \delta)$ est $D(\zeta_0, \delta) \setminus \{\zeta_0\}$.

3.I.A.2. Convergence des suites complexes. —

Définition 3.I.2. — Soit (z_n) une suite de nombres complexes. On dit que la suite (z_n) *converge* vers $w \in \mathbb{C}$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N_ε tel que, si $n \geq N_\varepsilon$, alors :

$$|z_n - w| < \varepsilon.$$

Remarque 3.I.3. — La suite (z_n) tend vers w si et seulement si $z_n - w$ tend vers 0. Ceci arrive si et seulement si la suite de nombre réels $(|z_n - w|)$ tend vers 0. Une condition encore équivalente est :

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{Re}(z_n) = \mathfrak{Re}\, w,$$
$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{Im}(z_n) = \mathfrak{Im}\, w.$$

Ceci découle facilement des inégalités :

$$|z_n - w| \leq |\mathfrak{Re}(z_n) - \mathfrak{Re}(w)| + |\mathfrak{Im}(z_n) - \mathfrak{Im}(w)|,$$
$$\begin{cases} |\mathfrak{Re}(z_n) - \mathfrak{Re}(w)| \leq |z_n - w|, \\ |\mathfrak{Im}(z_n) - \mathfrak{Im}(w)| \leq |z_n - w|. \end{cases}$$

3.I.A.3. Caractère complet de la droite complexe. —

Définition 3.I.4. — Soit (z_n) une suite de nombres complexes. On dit que la suite (z_n) *est de Cauchy* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N_ε tel que, si $n, m \geq N_\varepsilon$, alors :

$$|z_n - z_m| < \varepsilon.$$

Théorème 3.I.5. — *Une suite complexe converge si et seulement si elle est de Cauchy.*

Démonstration. — Ceci découle de nouveau des inégalités de la remarque 3.I.3. En effet, celles-ci permettent de dire que (z_n) est de Cauchy si et seulement si $\mathfrak{Re}(z_n)$ et $\mathfrak{Im}(z_n)$ sont de Cauchy, ce qui est équivalent d'après le théorème 1.III.6 à ce que $\mathfrak{Re}(z_n)$ et $\mathfrak{Im}(z_n)$ soient convergentes, donc à ce que (z_n) soit convergente. □

3.I.B. Séries complexes, convergence absolue. — Les séries complexes sont des séries à valeurs dans $\mathbb{C}$. Leur convergence en un point fixé revient à celle de la suite des sommes partielles.

Définition 3.I.6. — La série $\sum z_n$ de nombres complexes *converge* si la suite de nombre complexes (s_n) définie par comme somme partielle jusqu'au rang n est convergente :

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} z_k.$$

Remarque 3.I.7. — Si z_n ne tend pas vers 0, $\sum z_n$ ne peut converger.

Démonstration. — Si $\sum z_n$ converge, alors $\sum \mathfrak{Re}\, z_n$ converge, donc $\mathfrak{Re}\, z_n$ tend vers 0 d'après la proposition 2.I.7. Il en est de même pour $\mathfrak{Im}\, z_n$, ainsi z_n tend vers 0. □

Définition 3.I.8. — Soit $\sum z_n$ une série complexe. On dit que la suite $\sum z_n$ *converge absolument* si $\sum |z_n|$ converge.

Lemme 3.I.9. — *Une série à valeurs complexes qui converge absolument est convergente.*

Démonstration. — Soit $\sum z_n$ la série en question. Si la série $\sum z_n$ converge absolument, alors par définition $\sum |z_n|$ est une série convergente. Comme $|\mathfrak{Re}\, z_n| \leq |z_n|$, la série numérique $\sum |\mathfrak{Re}\, z_n|$ est convergente aussi par la proposition 2.II.2, donc $\sum \mathfrak{Re}\, z_n$ converge par la proposition 2.III.2. De même, $\sum \mathfrak{Im}\, z_n$ converge. On en déduit que $\sum z_n$ converge. □

3.I.C. Résultats réels valables en complexe. —

3.I.C.1. Produit de séries absolument convergentes. —

Proposition 3.I.10. — *Soit $\sum_{n\geq 0} x_n$ et $\sum_{n\geq 0} y_n$ séries complexes absolument convergentes et posons $z_n = \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k}$, $n \in \mathbb{N}$. Alors $\sum z_n$ converge absolument et :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n\right).$$

Démonstration. — D'abord un peu de notation. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$Z_n = \sum_{k=0}^{n} z_k, \qquad X_n = \sum_{k=0}^{n} x_k, \qquad Y_n = \sum_{k=0}^{n} y_j,$$

de sorte que :

$$Z_n = \sum_{0\leq i+j\leq n} x_i y_j, \qquad X_n Y_n = \sum_{0\leq i,j\leq n} x_i y_j.$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Les séries positives $\sum_n |x_n|$ et $\sum_n |y_n|$ étant convergentes, nous savons que le produit de leurs sommes tend vers la somme de la série $\sum w_n$ où $w_n = \sum_{k=0}^{n} |x_k||y_{n-k}|$. Donc on peut trouver n_ε tel que, pour tout $n \geq n_\varepsilon$, on ait :

$$\left| \sum_{0\leq i+j\leq n} |x_i||y_j| - \sum_{0\leq i,j\leq n} |x_i||y_j| \right| < \varepsilon.$$

Autrement dit :

$$\sum_{\substack{0\leq i,j\leq n \\ i+j\geq n+1}} |x_i||y_j| < \varepsilon.$$

On a alors :

$$|Z_n - X_n Y_n| = \left| \sum_{0\leq i+j\leq n} x_i y_j - \sum_{0\leq i,j\leq n} x_i y_j \right| = \left| \sum_{\substack{0\leq i,j\leq n \\ i+j\geq n+1}} x_i y_j \right| \leq \sum_{\substack{0\leq i,j\leq n \\ i+j\geq n+1}} |x_i||y_j| < \varepsilon.$$

ce qui prouve l'énoncé. □

3.I.C.2. Autres résultats réels valables en complexe. — Sans modifications essentielles des démonstrations, nous pouvons dire que les résultats suivants, exprimés en réel, restent valides en complexe.

- — La sommation par paquets d'une série complexe converge, et vers la même somme.
- — Le changement d'ordre d'une série complexe absolument convergente reste convergent, et vers la même somme ; de plus une série complexe dont toute permutation converge est absolument convergente.
- — La transformée d'Abel reste valide en complexe.

Exemple 3.I.11. — Soit $z = e^{i\vartheta}$, avec $\vartheta \in [0, 2\pi[$. Posons :

$$a_n = z^n = e^{in\vartheta}, \qquad b_n = \frac{1}{n}.$$

On a (b_n) positive et décroissante vers 0. Puis, pour $\vartheta \neq 0$:

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} e^{ik\vartheta}\right| = \frac{|e^{i(n+1)\vartheta} - 1|}{|e^{i\vartheta} - 1|},$$

et cette quantité est clairement bornée par $\frac{2}{|e^{i\vartheta}-1|}$. Donc grâce à la transformée d'Abel, on voit que $\sum \frac{e^{in\vartheta}}{n}$ converge pour tout $\vartheta \in]0, 2\pi[$.

3.II. Séries entières, convergence normale

Définition 3.II.1. — Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombre complexes. La *série entière* de terme général $a_n z^n$ est la suite :

$$s_n = \sum_{m=0}^{n} a_m z^m.$$

On note cette suite $\sum a_n z^n$.

À proprement parler, il s'agit d'une expression purement formelle. Cependant on peut penser à une série entière comme une série de fonctions.

3.II.A. Convergence simple. —

Définition 3.II.2. — Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, $\sum a_n z^n$ une série entière et considérons la série complexe $\sum a_n z_0^n$. Soit :

$$s_n = \sum_{m=0}^{n} a_m z_0^m.$$

On dit que $\sum a_n z^n$ *converge (simplement)* en z_0 vers $w \in \mathbb{C}$ si la suite des sommes partielles s_n converge vers w, i. e. $\lim_{n\to\infty} s_n = w$. On écrit alors :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n = w.$$

Ceci définit donc une application f, dite *somme de la série*, dont le domaine de définition est constitué des points z_0 où $\sum a_n z_0^n$ est convergente. On a :

$$z_0 \mapsto f(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n.$$

3.II.B. Convergence absolue. —

Définition 3.II.3. — On dit que $\sum a_n z_n$ *converge absolument* en $z_0 \in \mathbb{C}$ si la série numérique $\sum |a_n z_0^n|$ est convergente.

Lemme 3.II.4. — *Si la série entière $\sum a_n z^n$ converge absolument en z_0, alors elle converge simplement en z_0.*

Démonstration. — C'est le lemme 3.I.9 appliqué à $\sum a_n z_0^n$. □

3.II.C. Convergence normale. —

Définition 3.II.5. — On dit que la série entière $\sum a_n z^n$ *converge normalement* sur une partie D de $\mathbb{C}$ s'il existe une série numérique $\sum u_n$ convergente telle que :

$$|a_n z^n| \leq u_n, \qquad \text{pour tout } z \in D.$$

Remarque 3.II.6. — Si $\sum a_n z^n$ converge normalement sur une partie D de $\mathbb{C}$, alors elle converge absolument en tout point z de D. En effet, il existe $\sum u_n$ convergente telle que $|a_n z^n| \leq u_n$ pour tout $z \in P$, donc $\sum a_n z^n$ converge absolument (donc simplement).

3.III. Convergence normale sur les disques

3.III.A. Lemme d'Abel. — Le résultat suivant, bien que élémentaire, est très important.

Théorème 3.III.1. — *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $\sum a_n z^n$ une série entière. Supposons que $(a_n z_0^n)$ soit bornée, ce qui arrive par exemple si $\sum a_n z^n$ est convergente en z_0. Alors, pour tout $r < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $D(r)$.*

Démonstration. — On peut supposer $z_0 \neq 0$, sans quoi il n'y a rien à démontrer. Le fait que $\sum a_n z_0^n$ converge implique que $a_n z_0^n$ tend vers 0, et en particulier que $(a_n z^n)$ est bornée.

Ainsi il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$|a_n z_0^n| \leq M.$$

Si r est un réel tel que $0 < r < |z_0|$, alors quel que soit $\zeta \in D(r)$ on a :

$$|a_n \zeta^n| = |a_n||\zeta^n| < |a_n| r^n = |a_n z_0^n| \frac{r^n}{|z_0|^n} \leq M \left(\frac{r}{|z_0|} \right)^n.$$

Donc $(a_n \zeta^n)$ est majorée par une série géométrique, qui converge car $\frac{r}{|z_0|} < 1$. Donc $\sum a_n z^n$ est normalement convergente sur $D(r)$. □

3.III.B. Rayon de convergence. —

Définition 3.III.2. — Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On définit la partie suivante de la demi droite positive $[0,+\infty[$:

$$X = \{r \in [0,+\infty[\mid (a_n r^n) \text{ est bornée}\}.$$

Évidemment X n'est pas vide car $0 \in X$. Le *rayon de convergence* de $\sum a_n z^n$ est, par définition, $+\infty$ si X n'est pas majorée, ou si X est bornée on pose :

$$R = \sup(X).$$

Théorème 3.III.3. — *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et R son rayon de convergence. Alors :*

i) si $R = 0$, $\sum a_n z^n$ ne converge que pour $z = 0$;

ii) si $R = +\infty$, $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout disque de $\mathbb{C}$ centré en 0 ;

iii) si $R \in]0,+\infty[$, alors :

a) si $|\zeta| > R$, alors la série $\sum a_n \zeta^n$ est divergente ;

b) la série $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout disque centré en 0, de rayon $r < R$.

Démonstration. — Soit de nouveau :

$$X = \{r \in [0,+\infty[\mid (a_n r^n) \text{ est bornée}\}.$$

On a alors $R = \sup X$ dès que X est majorée.

Tout d'abord, si $|\zeta| > R$, alors $r = |\zeta|$ n'appartient pas à X, donc $(a_n r^n)$ n'est pas bornée. Ceci implique que $(a_n \zeta^n)$ ne tend pas vers 0, ainsi $\sum a_n \zeta^n$ diverge grossièrement. Nous avons montré (i) et (iiia). On peut supposer désormais $R > 0$.

Regardons la convergence normale. Soit $r < R$. Il existe alors $s \in X$ tel que $r < s$. Nous avons $(a_n s^n)$ bornée car $s \in X$. D'après le lemme d'Abel (appliqué à $z_0 = s$), la série $\sum a_n z^n$ est normalement convergente sur $D(r)$. Ceci montre (ii) et (iiib). $\square$

3.III.C. Exemples. —

Exemple 3.III.4. — Un polynôme est un exemple de série entière. Son rayon de convergence est $+\infty$.

Exemple 3.III.5. — La série exponentielle complexe :

$$\exp(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}.$$

Son rayon de convergence est $+\infty$.

Exemple 3.III.6. — La règle de d'Alembert montre que le rayon de convergence de

$$\sum_{n \geq 1} n! z^n$$

est nul. Donc cette série ne converge que pour $z = 0$.

Exemple 3.III.7. — La série entière géométrique est

$$\sum_{n\geq 0} z^n.$$

Son rayon de convergence est 1, car (z^n) est bornée si et seulement si $|z| \leq 1$. Par contre, si $|z| \geq 1$, le terme général z^n ne tend pas vers 0. *Cette série ne converge en aucun point du cercle $C(R)$.*

Exemple 3.III.8. — La série entière :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n^2}$$

a rayon de convergence 1, ce que l'on voit immédiatement en utilisant la règle de d'Alembert. Soit ζ de module 1. Alors :

$$\left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}.$$

La série $\sum \frac{1}{n^2}$ étant convergente, on a la convergence absolue de $\sum \frac{z^n}{n^2}$ en z. *Cette série converge en tout point du cercle $C(R)$.*

Exemple 3.III.9. — La série harmonique :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$$

a rayon de convergence 1. Elle converge en $z = -1$, mais pas en $z = 1$. *Cette série converge en certain points du cercle $C(R)$ mais pas en tous.* Nous avons vu que $z = 1$ est le seul point de divergence sur le cercle unitaire de la série harmonique.

3.III.D. Détermination pratique. — Dans la proposition suivante, on utilise la convention $1/0 = +\infty$ et $1/+\infty = 0$.

***Proposition 3.III.10* (Formule d'Hadamard).** — *Le rayon de convergence R d'une série entière $\sum a_n z^n$ satisfait à :*

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}.$$

Démonstration. — Posons :

$$L = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}.$$

donc $L \in [0, +\infty]$. Pour tout $0 \neq \zeta \in \mathbb{C}$, on a :

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n \zeta^n|^{\frac{1}{n}} = L|\zeta|.$$

D'après la règle de Cauchy 2.II.9, on voit que :

— si $L = 0$, alors $\sum a_n \zeta^n$ converge absolument quel que soit $\zeta \in \mathbb{C}$, donc $R = +\infty$.

— si $L = +\infty$, alors $\sum a_n \zeta^n$ n'est borné que pour $\zeta = 0$, donc $R = 0$.

— si $0 < R < +\infty$:

  — si $|\zeta| < \frac{1}{L}$, alors $\sum a_n \zeta^n$ converge absolument;

— si $|\zeta| > \frac{1}{L}$, alors $a_n\zeta^n$ n'est pas bornée, ainsi $\sum a_n\zeta^n$ diverge.

De cette analyse on voit que $1/L = R$. □

Proposition 3.III.11. — *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, et supposons que*

$$\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)_n$$

ait une limite $L \in [0, +\infty]$. Alors le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est $\frac{1}{L}$.

Démonstration. — C'est le même raisonnement que pour la règle d'Hadamard, cette fois en utilisant la règle de d'Alembert au lieu de celle de Cauchy. □

3.IV. Continuité des séries entières, convergence uniforme

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On définit, pour tout $\zeta \in \mathbb{C}$ point de convergence de cette série, la fonction :

$$f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\zeta^n.$$

Le but de cette partie est de montrer qu'une fonction définie comme somme d'une série entière est continue à l'intérieur du disque de convergence. Pour le faire, nous passons par un cadre beaucoup plus large en considérant des séries de fonctions, en soulignant que la propriété de continuité de la limite découle de la convergence uniforme.

3.IV.A. Convergence uniforme. — La convergence uniforme est la notion qu'on utilise pour étudier la convergence des suites de fonctions. Le voisinage d'une fonction est considéré en tant que voisinage pour la norme uniforme, ou *norme infini*. Autrement dit, on regardera pour une fonction f bornée sur une partie P de $\mathbb{C}$ ou de $\mathbb{R}$, le sup de $|f(\zeta)|$ sur $\zeta \in P$. Commençons par introduire la convergence simple.

3.IV.A.1. Convergence simple d'une suite de fonctions. — Soit (f_n) une suite de fonctions, bornées sur une partie P de $\mathbb{C}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, et f une fonction définie sur P, à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Définition 3.IV.1. — On dit que (f_n) *converge simplement* vers f si, pour tout $\zeta \in P$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\zeta) = f(\zeta).$$

Bien sûr, on peut donner des définitions analogues pour des suites de fonctions à variable réelle, et/ou à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Exemple 3.IV.2. — Soit, pour $n \geq 1$, $f_n(x) = x^n$ définie sur $P =]0,1[$. Il est clair que, pour tout $x \in P$, on a $\lim_{n\to\infty}(x^n) = 0$, donc (f_n) converge simplement vers la fonction $f = 0$, définie aussi sur P. De même si $P = D(0,1)$ la suite (f_n) définie par $f_n(z) = z^n$ converge vers la fonction nulle.

3.IV.A.2. Norme uniforme. — On fixe une partie $P \subset \mathbb{C}$ et on définit la norme uniforme d'une fonction f bornée sur P à valeurs dans $\mathbb{C}$. On peut aussi considérer f à valeurs réelles, ou de variable réelle et obtenir des définitions analogues.

Définition 3.IV.3. — Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie sur $P \subset \mathbb{C}$. On pose, pour f bornée sur P :

$$\|f\|_\infty = \sup_{\zeta \in P} |f(\zeta)|,$$

autrement on pose $\|f\|_\infty = +\infty$.

Remarque 3.IV.4. — La fonction $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur l'ensemble des fonctions bornées sur P.

Démonstration. — On a, pour f, g bornées sur P :

$$\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty. \tag{8}$$

En effet, pour tout $\zeta \in P$, on a

$$|f(\zeta)+g(\zeta)| \leq |f(\zeta)| + |g(\zeta)| \leq \sup_{\zeta_1 \in P} |f(\zeta_1)| + \sup_{\zeta_2 \in P} |g(\zeta_2)| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty,$$

donc on a (8) en prenant le sup sur $\zeta \in P$.

De plus, si f est définie P et $\|f\|_\infty = 0$ alors $\sup_{\zeta \in P} |f(\zeta)| = 0$ donc $|f(\zeta)| = 0$ quel que soit $z \in P$, i.e. $f = 0$. Enfin si $\lambda \in \mathbb{C}$ alors :

$$\|\lambda f\|_\infty = \sup_{\zeta \in P} |\lambda f(\zeta)| = |\lambda| \sup_{\zeta \in P} |f(\zeta)| = |\lambda| \|f\|_\infty.$$

□

3.IV.A.3. Convergence uniforme d'une suite de fonctions. — Soit (f_n) une suite de fonctions, définies sur une partie P de $\mathbb{C}$ ou de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, et f une fonction définie sur P, à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Définition 3.IV.5. — On dit que (f_n) *converge uniformément* vers f si, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier N tel que, quel que soit $n \geq N$, on ait :

$$\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon.$$

Lemme 3.IV.6. — *Si (f_n) converge uniformément vers f dans P, alors (f_n) converge simplement vers f dans P.*

Démonstration. — Soit $\zeta \in P$ et fixons $\varepsilon > 0$. Il existe alors N tel que :

$$n \geq N \Rightarrow \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon.$$

Donc, pour tout $\zeta \in P$:

$$n \geq N \Rightarrow |f_n(\zeta) - f(\zeta)| < \varepsilon.$$

Ainsi $(f_n(\zeta))$ tend vers $f(\zeta)$ lorsque n tend vers ∞. □

Exemple 3.IV.7. — Reprenons l'exemple 3.IV.2 donc $f_n(x) = x^n$ pour tout $x \in]0,1[$. On voit que (f_n) ne converge pas uniformément. En effet, si (f_n) convergeait uniformément, alors forcément ce serait vers la fonction nulle $f = 0$ car (f_n) converge déjà simplement vers f. Cependant, fixons $0 < \varepsilon < 1$ et supposons qu'il existe n_0 tel que $n \geq n_0$ implique $\sup_{x\in P}|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, i. e. $x^n = |x^n - 0| < \varepsilon$ pour tout $x \in]0,1[$, en particulier $x^{n_0} < \varepsilon$. Bien sûr $x_0 = \varepsilon^{1/n_0} \in]0,1[$, donc $x_0^{n_0} = \varepsilon$, contre l'hypothèse $x^{n_0} < \varepsilon$ pour tout $x \in]0,1[$.

Si en revanche on fixe $P =]0,1/2]$, alors la convergence est uniforme. En effet, soit $\varepsilon > 0$. Comme $1/2^n$ tend vers 0, on peut trouver n_0 tel que $1/2^n < \varepsilon$, quel que soit $n \geq n_0$. Ainsi, par croissance de la fonction x^n, on a $x^n < 1/2^n < \varepsilon$ pour tout $x \in]0,1/2[$ et $n \geq n_0$, autrement dit $\sup_{x\in P}|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Exemple 3.IV.8. — Soit $k \in \mathbb{N}$. La suite de fonctions $f_n(x) = x^k/(x^2+n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $f = 0$. Pour $k = 0$ on a $0 \leq f_n \leq 1/n$, ce qui entraîne la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$. Pour $k \geq 1$ on a :

$$f'(x) = \frac{x^{k-1}}{(x^2+n)^2}((k-2)x^2 + kn).$$

Le sup sur $\mathbb{R}$ de $|f_n(x)|$ est $n^{-1/2}/2$ si $k = 1$, ou 1 pour $k = 2$, ou $+\infty$ si $k \geq 3$. Pour $k = 0,1$ la convergence est donc uniforme sur $\mathbb{R}$, tandis que pour $k \geq 2$ on a convergence simple mais pas uniforme.

3.IV.A.4. Suites de fonctions uniformément de Cauchy. — Nous allons voir maintenant que, si une suite de fonctions est à valeurs complexes (ou réelles) alors la condition d'être de uniformément de Cauchy (à définir) est équivalente à celle d'être uniformément convergente. Autrement dit nous allons montrer un résultat de complétude pour la norme uniforme.

On fixe toujours une partie $P \subset \mathbb{C}$ et on regarde une suite de fonctions (f_n) dont le domaine de définition est contenu dans P, à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Définition 3.IV.9. — On dit que (f_n) est *uniformément de Cauchy* sur P si, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier N tel que, quel que soit $n, m \geq N$, on ait :

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon.$$

Théorème 3.IV.10. — *Une suite de fonctions définies sur une partie P de $\mathbb{C}$ est uniformément de Cauchy si et seulement si elle est uniformément convergente.*

Démonstration. — Soit (f_n) une suite uniformément convergente vers f dans P. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$ implique :

$$\|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors pour tout $n, m \geq N$ on a :

$$\|f_n - f_m\|_\infty \leq \|f_n - f\|_\infty + \|f - f_m\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Donc la suite est uniformément de Cauchy.

Réciproquement, soit (f_n) uniformément de Cauchy sur P. Alors pour tout $\zeta \in P$ on a $(f_n(\zeta))$ de Cauchy dans $\mathbb{C}$, donc $(f_n(\zeta))$ est convergente : notons $f(\zeta)$ la limite.

Montrons alors que (f_n) converge uniformément vers f dans P. Soit $\varepsilon > 0$, et N tel que $n, m \geq N$ implique :

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Nous allons montrer que, si $n \geq N$, on a :

$$\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon.$$

Ce sera le cas si, pour tout $\zeta \in P$, on a $\|f_n(\zeta) - f(\zeta)\| < \frac{2\varepsilon}{3}$.

Soit alors $\zeta \in P$. Comme la suite $(f_m(\zeta))$ tend vers $f(\zeta)$, il existe $M = M(\varepsilon, \zeta)$ tel que, pour tout $m \geq M$ on ait :

$$|f_m(\zeta) - f(\zeta)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Quel que soit $m \in \mathbb{N}$, on peut utiliser l'inégalité :

$$|f_n(\zeta) - f(\zeta)| \leq |f_n(\zeta) - f_m(\zeta)| + |f_m(\zeta) - f(\zeta)|,$$

et si $m \geq \max(M, N)$ on en déduit :

$$|f_n(\zeta) - f(\zeta)| < |f_n(\zeta) - f_m(\zeta)| + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Or comme $m, n \geq N$ on trouve $|f_n(\zeta) - f_m(\zeta)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$. Donc :

$$|f_m(\zeta) - f(\zeta)| \leq \frac{2\varepsilon}{3},$$

ce qui termine la preuve. □

3.IV.B. Convergence normale et uniforme des séries de fonctions. — La convergente normale, que nous avons vu pour les séries entières, peut être définie plus en général pour les séries de fonctions.

3.IV.B.1. Convergence uniforme d'une série de fonctions. — On peut définir des séries de fonctions à partir des suites de fonctions, simplement en prenant la somme jusqu'à un rang fixé des termes d'une suite.

Lemme 3.IV.11. — *Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur $P \subset \mathbb{C}$. Alors $\sum f_n$ est uniformément convergente sur P si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$ et $p \geq 0$ impliquent :*

$$\sup_{\zeta \in P} |f_{n+1}(\zeta) + \cdots + f_{n+p}(\zeta)| < \varepsilon.$$

Démonstration. — En effet, cette condition est équivalente à ce que la suite des sommes partielles de $\sum f_n$ soit uniformément de Cauchy, ce qui équivaut à ce qu'elle soit uniformément convergente. □

3.IV.B.2. Convergence normale d'une série de fonctions. —

Définition 3.IV.12. — Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur une partie P de $\mathbb{C}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$. On dit que $\sum f_n$ *converge normalement* sur P s'il existe une série numérique convergente $\sum u_n$ telle que :

$$\|f_n\|_\infty \leq u_n.$$

Proposition 3.IV.13. — *Soit $\sum f_n$ une série de fonctions normalement convergente dans une partie $P \subset \mathbb{C}$. Alors $\sum f_n$ converge uniformément dans P.*

Démonstration. — Soit $\sum u_n$ une série positive convergente qui domine $\sum f_n$ sur P, i. e. telle que pour tout $\zeta \in P$ on ait $|f_n(\zeta)| \leq u_n$. Alors pour tout $\zeta \in P$ on a :

$$\sup_{\zeta \in P} |f_{n+1}(\zeta) + \cdots + f_{n+p}(\zeta)| \leq \sup_{\zeta_1 \in P} |f_{n+1}(\zeta_1)| + \cdots + \sup_{\zeta_p \in P} |f_{n+p}(\zeta_p)| \leq u_{n+1} + \cdots + u_{n+p} < \varepsilon,$$

la dernière inégalité étant valide pour tout $n \geq N$ et $p \geq 0$, où N existe en vertu du fait que, la série $\sum u_n$ étant convergente, sa suite des sommes partielles est de Cauchy. □

3.IV.C. Continuité de la limite uniforme. —

3.IV.C.1. Continuité d'une fonction de variable complexe. — Soit $\zeta_0 \in \mathbb{C}$. Soit P une partie de $\mathbb{C}$ et $f : P \to \mathbb{C}$ une application.

Définition 3.IV.14. — On dit que f est *définie au voisinage* de ζ_0 si, pour tout $r > 0$, le domaine de définition P de f intercepte $D(\zeta_0, r)$, i. e. il existe $\zeta \in P \cap D(\zeta_0, r)$.

Ceci équivaut à ce que ζ_0 soit dans l'adhérence du domaine de définition de f. Pour une fonction définie au voisinage de ζ_0 on peut formuler la définition de limite.

Définition 3.IV.15. — Soit $f : P \to \mathbb{C}$ définie au voisinage de $\zeta_0 \in \mathbb{C}$ et soit $w \in \mathbb{C}$. On dit que f *tend vers* w en ζ_0, noté $\lim_{\zeta \to \zeta_0} f(\zeta) = w$, si $\forall \varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que :

$$\zeta \in P \cap D(\zeta_0, \delta) \Rightarrow |f(\zeta) - w| < \varepsilon.$$

Si f est définie en ζ_0, on dit que f est *continue* en ζ_0 si $\lim_{\zeta \to \zeta_0} f(\zeta) = f(\zeta_0)$.

Pour ce qui concerne la limite vers l'infini, on pense que $f : P \to \mathbb{C}$ est définie dans *un voisinage de l'infini* si le domaine de définition P de f intercepte le complément de tout disque centré en l'origine, i. e. si, pour tout $r_0 \geq 0$ fixé, il existe $\zeta \in P$ avec $|\zeta| \geq r_0$.

Dans ce cas on écrit $\lim_{\zeta \to \infty} f(z) = w$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe R tel que, si $\zeta \in P$ et $|\zeta| \geq R$, alors $|f(\zeta) - w| < \varepsilon$.

3.IV.C.2. Limite uniforme : échange de limites et continuité. — Le résultat suivant exprime le fait fondamental suivant : pour une suite de fonctions (f_n) uniformément convergente, on peut intervertir les passages à la limite en $\zeta \to \zeta_0$ et $n \to \infty$.

Théorème 3.IV.16. — *Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs complexes ou réelles, définies sur une partie P de $\mathbb{C}$ ou de $\mathbb{R}$ et soit ζ_0 dans l'adhérence de P. Supposons que (f_n) converge vers f, uniformément en P, et que les limites suivantes existent finies :*

$$\lim_{\zeta \to \zeta_0} f_n(\zeta) = w_n,$$
$$\lim_{n \to \infty} w_n = w.$$

Alors f est définie au voisinage de ζ_0 et :

$$\lim_{\zeta \to \zeta_0} f(\zeta) = w.$$

En particulier, si les f_n sont continues en ζ_0 alors f l'est.

Démonstration. — D'abord, ζ_0 appartient à l'adhérence de P et (f_n) converge ponctuellement vers f sur P donc P est dans le domaine de définition de f, ainsi ζ_0 appartient à l'adhérence du domaine de définition de f, i. e. f est définie au voisinage de ζ_0.

Soit $\varepsilon > 0$. On veut montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $\zeta \in D(\zeta_0, \delta) \cap P$, on ait :

$$|f(\zeta) - w| < \varepsilon.$$

Par convergence uniforme de (f_n) sur P il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, on ait :

$$\sup_{\zeta \in P} |f_n(\zeta) - f(\zeta)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Il existe aussi M tel que, pour tout $n \geq M$, on ait :

$$|w_n - w| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Prenons $n \geq \max(N, M)$. Il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $\zeta \in D(\zeta_0, \delta) \cap P$, on ait :

$$|f_n(\zeta) - w_n| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Alors :

$$|f(\zeta) - w| \leq |f(\zeta) - f_n(\zeta)| + |f_n(\zeta) - w_n| + |w_n - w| < \varepsilon.$$

Pour l'affirmation sur la continuité, on remplace w_n par $f_n(\zeta_0)$, donc f_n continue en ζ_0 équivaut à $\lim_{\zeta \to \zeta_0} f_n(\zeta) = w_n$. On a alors que $\lim_{n \to \infty} w_n = f(\zeta_0)$. En effet, (f_n) converge ponctuellement vers f sur P, donc en ζ_0, ce qui veut dire $\lim_{n \to \infty} f_n(\zeta_0) = f(\zeta_0)$. La conclusion $\lim_{\zeta \to \zeta_0} f(\zeta) = w$ signifie donc que f est continue en ζ_0. □

Le résultat du théorème peut se reformuler en disant que, sous l'hypothèse de convergence uniforme, on peut échanger les limites :

$$\lim_{\zeta \to \zeta_0} \lim_{n \to \infty} f_n(\zeta) = \lim_{n \to \infty} \lim_{\zeta \to \zeta_0} f_n(\zeta).$$

En effet, à gauche nous avons $\lim_{\zeta \to \zeta_0} f(\zeta)$ et à droite $w = \lim_{n \to \infty} w_n$.

Exemple 3.IV.17. — En reprenant l'exemple 3.IV.2, on voit que si la convergence n'est pas uniforme l'interversion des limites n'est pas possible à priori. En effet, pour $P = [0,1]$ et $f_n(x) = x^n$, la suite (f_n) converge vers la fonction f qui prend valeur $f(x) = 0$ pour $x \in [0,1[$ et $f(1) = 1$. Ainsi :

$$\lim_{x\to 1}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{x\to 1} f(x) = 0 \neq f(1).$$

Par contre :

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to 1} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} 1^n = 1.$$

Aussi, les fonctions f_n sont continues et même indéfiniment dérivables mais f n'est pas continue.

Corollaire 3.IV.18. — *Une série entière est continue en tout point à l'intérieur du disque de convergence.*

Démonstration. — La série entière est une suite de fonctions polynomiales, donc évidemment continues. La convergence vers la somme de la série étant normale (donc uniforme) dans le disque de convergence, on a la continuité de la fonction somme de la série. □

3.V. Dérivation de séries

3.V.A. Dérivation au sens complexe. —

Définition 3.V.1. — Soit f une fonction à valeurs complexes, définie sur un disque ouvert centré en ζ_0. On dit que f est $\mathbb{C}$*-dérivable en* ζ_0 si la limite suivante existe finie :

$$\lim_{\zeta\to\zeta_0} \frac{f(\zeta) - f(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0}.$$

Si la dérivée existe, alors on la note :

$$f'(\zeta_0).$$

3.V.B. Série entière dérivée. —

Définition 3.V.2. — Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On appelle *série entière dérivée :*

$$\sum n a_n z^{n-1}.$$

3.V.B.1. Rayon de convergence de la série dérivée. —

Lemme 3.V.3. — *Soient (u_n), (v_n) suites numériques, avec (u_n) convergente vers un réel $a \neq 0$. Alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n v_n)$ est :*

$$\{ab \mid b \text{ est valeur d'adhérence de } (v_n)\}.$$

En particulier, si $a > 0$:

$$\limsup_{n\to\infty}(u_n v_n) = a \limsup_{n\to\infty} v_n.$$

Démonstration. — Si $b \in \mathbb{R}$ est valeur d'adhérence de (v_n), alors il existe une suite extraite (v_{n_k}) qui converge vers b donc :

$$\lim_{k\to\infty}(u_{n_k}v_{n_k}) = ab,$$

ainsi ab est valeur d'adhérence de (u_nv_n).

De même si $+\infty$ est valeur d'adhérence de (v_n) alors on peut trouver une suite extraite (v_{n_k}) de (v_n) qui tend vers $+\infty$. Ainsi, si $a > 0$, $(u_{n_k}v_{n_k})$ tend aussi vers $+\infty$ car $\lim_{k\to\infty} u_{n_k} = a$ et $\lim_{k\to\infty} v_{n_k} = +\infty$. De même si $a < 0$ on trouve $\lim_{k\to\infty} u_{n_k}v_{n_k} = -\infty$. Donc dans tous les cas ab est valeur d'adhérence de (u_nv_n) lorsque $b = +\infty$. De même pour $-\infty$.

Réciproquement, si $c \in \mathbb{R}$ est valeur d'adhérence de (u_nv_n) alors il existe une suite extraite $(u_{n_k}v_{n_k})$ qui converge vers c. Comme (u_{n_k}) tend vers $a \neq 0$, on a :

$$\lim_{k\to\infty}(v_{n_k}) = c/a,$$

Ainsi, $b = c/a$ est valeur d'adhérence de (v_n). Si $+\infty$ est valeur d'adhérence de (u_nv_n), alors il existe une suite extraite $(u_{n_k}v_{n_k})$ qui tend vers $+\infty$. Or $(1/u_{n_k})$ tend vers $1/a \in \mathbb{R}^*$, donc (v_{n_k}) tends vers le produit de $1/a$ et $+\infty$, i. e. vers $+\infty$ si $a > 0$ et vers $-\infty$ si $a < 0$. De même pour $-\infty$. Dans tous les cas, on a c/a valeur d'adhérence de (v_n).

L'énoncé concernant la limite supérieure vient du fait que celle-ci est le maximum parmi les valeurs d'adhérence, et que, si $a > 0$:

$$a\max\{b \mid b \text{ valeur d'adhérence de } (v_n)\} = \max\{c \mid c \text{ valeur d'adhérence de } (u_nv_n)\}$$

□

Proposition 3.V.4. — *Soit $\sum a_nz^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors la série dérivée $\sum na_nz^{n-1}$ a aussi rayon de convergence R.*

Démonstration. — On voit que $\sum na_nz^{n-1}$ et $\sum na_nz^n$ ont le même rayon de convergente. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\zeta\imath\mathbb{C}$ on a :

$$|na_n\zeta^n| = |\zeta||na_n\zeta^{n-1}|.$$

Donc $(na_n\zeta^n)$ et bornée si et seulement si $(na_n\zeta^{n-1})$ l'est.

Maintenant par la formule d'Hadamard on voit que $\sum na_nz^n$ et $\sum a_nz^n$ ont le même rayon de convergence. En effet, soit R' le rayon de convergence de $\sum na_nz^n$ et R le rayon de convergence de $\sum a_nz^n$. Alors :

$$\frac{1}{R'} = \limsup_{n\to\infty}|na_n|^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{R}. \tag{9}$$

En effet, on a :

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\exp\left(\frac{1}{n}\ln(n)\right) = e^0 = 1.$$

donc le lemme précédent garantit l'égalité (9). □

3.V.B.2. Dérivabilité complexe d'une série entière. —

Théorème 3.V.5. — *La fonction f définie par une série entière $\sum a_n z^n$ dans le disque de convergence $D(R)$ est $\mathbb{C}$-dérivable et en tout point $\zeta_0 \in D(R)$ on a :*

$$f'(\zeta_0) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n \zeta_0^{n-1}.$$

Démonstration. — Soit $\zeta \in D(R) \setminus \{\zeta_0\}$. On a :

$$\frac{f(\zeta) - f(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(\zeta),$$

avec :

$$v_n(\zeta) = a_n(\zeta^{n-1} + \zeta^{n-2}\zeta_0 + \cdots + \zeta\zeta_0^{n-2} + \zeta_0^{n-1}) = a_n \sum_{k=0}^{n-1} \zeta^k \zeta_0^{n-k-1}.$$

Choisissons alors $0 < r < R$ de sorte que $\zeta, \zeta_0 \in D(r)$. On a alors :

$$|v_n(\zeta)| = \left| a_n \sum_{k=0}^{n-1} \zeta^k \zeta_0^{n-k-1} \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| a_n \zeta^k \zeta_0^{n-k-1} \right| \leq$$
$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_n| |\zeta|^k |\zeta_0|^{n-k-1} \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| a_n r^k r^{n-k-1} \right| = n|a_n| r^n.$$

La série $\sum_n n|a_n|r^n$ converge puisque la série dérivée converge absolument à l'intérieur de son disque de convergence, c'est à dire $D(R)$. Ainsi la série de fonctions $\sum v_n$ converge normalement, donc uniformément sur $D(r)$. De plus, chacune des fonctions v_n est polynomiale donc continue sur $\mathbb{C}$, donc $\sum v_n$ converge vers une fonction g continue, définie sur $D(r)$. Ainsi, comme $\zeta_0 \in D(r)$, la limite :

$$g(\zeta_0) = \lim_{\zeta \to \zeta_0} \frac{f(\zeta) - f(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0}$$

existe, ainsi $f'(\zeta_0) = g(\zeta_0)$ existe et f est dérivable en ζ_0.

Enfin en remplaçant ζ par ζ_0 dans l'expression de $v_n(\zeta)$ on voit que $g(\zeta_0)$ est la somme de la série dérivée $\sum n a_n z^{n-1}$ calculée en ζ_0. □

3.V.B.3. Indéfinie dérivabilité. —

Corollaire 3.V.6. — *Une fonction f définie comme somme d'une série entière $\sum a_n z^n$ est indéfiniment $\mathbb{C}$-dérivable à l'intérieur du rayon de convergence R. On a, pour tout $k \geq 0$*

et tout $\zeta \in D(R)$:

$$\begin{aligned} f^{(k)}(\zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n\zeta^{n-k} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}(m+k)\cdots(m+1)a_{m+k}\zeta^m, \\ f^{(k)}(0) &= k!a_k. \end{aligned}$$

3.VI. Développement en série entière en 0

Définition 3.VI.1. — Soit g une fonction de variable complexe définie dans une partie P de $\mathbb{C}$ contenant 0. On dit que g est *développable en série entière sur un disque de rayon* $r > 0$ s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R \geq r$ telle que, pour tout $\zeta \in D(r)$, on ait :

$$g(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n.$$

Définition 3.VI.2. — Soit f une fonction indéfiniment dérivable sur un disque $D(r)$ avec $r > 0$. On appelle alors *série de Taylor* de f la série entière :

$$\sum a_n z^n, \qquad \text{avec } a_n \text{ défini par :} \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Exemple 3.VI.3. — La fonction $g(z) = \frac{1}{1-z}$ est développable en série entière sur $D(1)$, la série entière en question étant $\sum z^n$.

La proposition suivante dit qu'une fonction développable en série entière coïncide avec la somme de sa série de Taylor en un voisinage de 0.

Proposition 3.VI.4. — *Soit g développable en série entière sur un disque $D(0,r)$, avec $r > 0$. Alors g est indéfiniment dérivable sur $D(0,r)$ et le développement est $\sum a_n z^n$ avec $a_n = g^{(n)}(0)/n!$.*

Démonstration. — Soit g développable en série entière sur $D(0,r)$. Alors g coïncide en tout point de $D(0,r)$ avec la fonction f somme de la série $\sum a_n z^n$ qui représente sont développement en 0. Comme f est indéfiniment dérivable sur $D(0,r)$, g aussi l'est.

De plus, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$g^{(k)}(0) = f^{(k)}(0) = k!a_k,$$

d'après l'expression de la dérivée d'ordre k de $\sum a_n z^n$ en 0. On en obtient l'expression cherchée pour le développement. □

Lorsqu'on on analyse une fonction autour de 0, il faut faire attention à ce qu'elle soit développable avant de conclure qu'elle coïncide avec la somme de sa série de Taylor. En effet, l'exemple classique suivant montre qu'un fonction peut être indéfiniment dérivable sans pour autant être développable.

Exemple 3.VI.5. — Considérons la fonction $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right).$$

Comme $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, on prolonge g par continuité à $\mathbb{R}$ en posant $g(0) = 0$. On voit que g est indéfiniment dérivable en 0 au sens réel, mais que g n'est pas développable en série entière en 0. En effet, toutes les dérivées de g s'annulent en 0, donc si g admettait un développement en série entière en 0, celui-ci s'identifierait avec la série de Taylor de g, qui est identiquement nulle. Par conséquent, on aurait un intervalle $]-r, r[$ avec $r > 0$ où g serait identiquement nulle. Mais $g(x) \neq 0$, pour tout $x \neq 0$.

3.VI.A. Séries de Taylor classiques. —

3.VI.A.1. Exponentielle. — La série entière exponentielle $\sum \frac{1}{n!} z^n$ a rayon de convergence infini. La fonction exponentielle $e^z = \exp(z)$ est définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$e^\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \zeta^n.$$

3.VI.A.2. Logarithme. — La série entière harmonique $\sum \frac{1}{n} z^n$ a rayon de convergence 1. A l'intérieur du disque de convergence $D(0,1)$ on a :

$$\ln(\zeta + 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \zeta^n.$$

La formule ci-dessus vaut (d'après analyse de la série harmonique sur son cercle de convergence) pour tout ζ de module 1 hormis pour $\zeta = -1$.

3.VI.A.3. Puissance. — Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On a, pour $\zeta \in D(0,1)$:

$$(1+\zeta)^\alpha = \exp(\alpha \ln(1+\zeta)) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n(n-1)\cdots 1} \zeta^n.$$

3.VI.A.4. Sinus et cosinus. — Les fonctions sinus et cosinus sont définies par les séries entières suivantes, de rayon de convergence infini.

$$\sin(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \zeta^{2n+1},$$

$$\cos(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \zeta^{2n}.$$

La fonction tangente fait apparaître les nombres de Bernoulli (B_n), définis par la relation suivante, valide pour $|x| < 2\pi$:

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n.$$

On a alors le développement en série, de rayon de convergence $\pi/2$:

$$\tan(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} |B_{2n}| \frac{4^n(4^n - 1)}{(2n)!} \zeta^{2n-1}.$$

3.VI.A.5. Sinus et cosinus hyperboliques. — Les fonctions sinus et cosinus hyperboliques sont définies par les séries entières suivantes, de rayon de convergence infini.

$$\sinh(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \zeta^{2n+1},$$

$$\cosh(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \zeta^{2n}.$$

La tangente hyperbolique a rayon de convergence $\pi/2$ et s'écrit :

$$\tan(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n} \frac{4^n(4^n - 1)}{(2n)!} \zeta^{2n-1}.$$

3.VI.A.6. Fonctions trigonométriques et hyperboliques inverses. — Les développement en série entière des fonctions arcsinus, arccosinus et arctangente ont rayon de convergence 1 :

$$\arcsin(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} \zeta^{2n+1},$$

$$\arccos(\zeta) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} \zeta^{2n+1},$$

$$\operatorname{arsh}(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} \zeta^{2n+1},$$

$$\operatorname{artan}(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \zeta^{2n+1},$$

$$\operatorname{arth}(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \zeta^{2n+1}.$$

3.VI.B. Critère de développabilité. — Soit n un entier. Rappelons qu'une fonction de variable réelle est de classe $\mathcal{C}^n$ sur une partie P de $\mathbb{R}$ si f est dérivable n fois sur P et $f^{(n)}$ est continue sur P. On suppose pour le moment connu le théorème fondamental du calcul intégral, voir 4.IV.2. Celui-ci affirme en particulier que, si f

est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle borné I et $a \in I$ alors pour tout $x \in I$ on a :

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt. \tag{10}$$

Théorème 3.VI.6. — *Soit $R > 0$, $I = [-R, R]$.*

i) Soit f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I, alors pour tout $x \in I$ on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \rho_n(x), \qquad \rho_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt;$$

ii) Soit f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et supposons qu'il existe (u_n) telle que $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n R^n}{n!} = 0$ et que pour tout $x \in I$ on ait :

$$|f^{(n)}(x)| \leq u_n,$$

alors f est développable en série entière sur I.

Démonstration. — D'abord, (i) est valide pour $n = 0$ d'après la formule (10). On suppose donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, que (i) soit valide au rang $n-1$ et on montre que cela entraîne la validité de (i) rang n.

On intègre ρ_n par parties, du fait que $f^{(n)}$ est une primitive de $f^{(n+1)}$:

$$\begin{aligned}
\rho_n(x) &= \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt = \\
&= \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t)\Big|_{t=0}^{t=x} - \int_0^x \frac{-n(x-t)^{n-1}}{n!} f^{(n)}(t)dt = \\
&= -\frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt = -\frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \rho_{n-1}(x).
\end{aligned}$$

Ainsi, comme on suppose (i) valide au rang $n-1$, on obtient :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \rho_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \rho_n(x),$$

ce qui prouve que (i) valide au rang n. Ainsi (i) est montrée par récurrence sur n.

Pour (ii), on note σ la somme partielle de la série de Taylor :

$$\sigma_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

donc $f_n(x) = \sigma_n(x) + \rho_n(x)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a f développable en série au point $x \in I$ si $\lim_{n\to\infty} \rho_n(x) = 0$, autrement dit si (ρ_n) converge simplement vers 0 sur I. On écrit donc, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, R]$, par croissance de l'intégrale (voir remarque

4.I.7) :

$$\begin{aligned}|\rho_n(x)| &\le \int_0^x \frac{|x-t|^n}{n!}\left|f^{(n+1)}(t)\right|dt \le \\ &\le u_{n+1}\int_0^x \frac{|x-t|^n}{n!}dt = u_{n+1}\left.\frac{-(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right|_{t=0}^{t=x} = \\ &= \frac{u_{n+1}}{(n+1)!}x^{n+1} \le \frac{u_{n+1}R^{n+1}}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

Sous l'hypothèse $\lim_{n\to\infty}\frac{u_nR^n}{n!} = 0$ on a donc que $(\rho_n(x))$ converge vers 0. De même si $x \in [-R, 0]$. Ceci montre que f est développable en série entière sur I. □

Remarque 3.VI.7. — Supposons qu'il existe une constante $M, b \in \mathbb{R}_+$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [-R, R]$, on ait :

$$|f^{(n)}(x)| \le Mb^n.$$

Alors on peut poser, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = Mb^n$ et on obtient :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_nR^n}{n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{M(bR)^n}{n!} = 0.$$

Donc dans ce cas les hypothèses du théorème précédent sont satisfaites. Ceci montre, par exemple, que les fonctions sinus et cosinus sont développables en série entière.

3.VII. Opération sur les séries

3.VII.A. Combinaison linéaire et produit. —

Théorème 3.VII.1. — *Soit $\sum a_nz^n$ et $\sum b_nz^n$ séries entières, et notons R et S, respectivement, leurs rayons de convergence.*

i) Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, considérons la série entière :

$$\sum(\lambda a_n + \mu b_n)z^n$$

et notons T son rayon de convergence. Alors on a :

$$T \ge \min(R, S),$$

et pour tout $\zeta \in D(T)$, la somme de cette série vaut :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n)\zeta^n.$$

ii) Soit U le rayon de convergence de la série entière :

$$\sum c_nz^n, \qquad c_n = \sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}.$$

Alors :

$$U \ge \min(R, S),$$

et la somme de cette série converge vers le produit de sommes des deux séries.

Démonstration. — Soit $r \in \mathbb{R}$ non négatif tel que $r < \min(R, S)$. Alors les suites $(a_n r^n)$ et $(b_n r^n)$ sont bornées, disons par M et N. Il est alors clair que $((\lambda a_n + \mu b_n) r^n)$ est bornée :

$$|(\lambda a_n + \mu b_n) r^n| \leq |\lambda a_n r^n| + |\mu b_n r^n| \leq |\lambda| M + |\mu| N.$$

Ainsi :

$$\sup\{r \in [0, +\infty[\mid ((\lambda a_n + \mu b_n) r^n) \text{ est bornée}\} \geq \min(R, S).$$

Pour le produit, on utilise à peu près le même raisonnement. En effet, pour tout point $\zeta \in \mathbb{C}$ à l'intérieur du plus petit des deux disques de convergence, on a :

$$\sum a_n \zeta^n \text{ et } \sum b_n \zeta^n \text{ absolument convergentes.}$$

Donc nous pouvons utiliser nos résultats sur le produit de séries positives convergentes pour dire que $\sum c_n \zeta^n$ converge absolument, car :

$$|c_n \zeta^n| = \left| \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right| |\zeta|^n \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k b_{n-k}| |\zeta|^n,$$

et cette dernière série est convergente. Ceci montre que $U \geq \min(R, S)$.

Ensuite, si on note $s_n(\zeta)$, $t_n(\zeta)$ et $u_n(\zeta)$ les sommes partielles jusqu'au rang n de $\sum a_n \zeta^n$, $\sum b_n \zeta^n$ et $\sum c_n \zeta^n$. Ce qu'on veut montrer est :

$$\lim_{n \to \infty} (s_n t_n - u_n) = 0.$$

Écrivons explicitement ce terme. C'est :

$$\sum_{0 \leq i,j \leq n} a_i b_j \zeta^{i+j} - \sum_{0 \leq i+j \leq n} a_i b_j \zeta^{i+j} = \sum_{\substack{0 \leq i,j \leq n \\ i+j \geq n+1}} a_i b_j \zeta^{i+j}.$$

Nous savons, par le résultat sur le produit de séries positives, que :

$$\lim_{n \to \infty} (|s_n t_n| - |u_n|) = 0.$$

Donc :

$$\sum_{0 \leq i,j \leq n} |a_i b_j \zeta^{i+j}| - \sum_{0 \leq i+j \leq n} |a_i b_j \zeta^{i+j}| = \sum_{\substack{0 \leq i,j \leq n \\ i+j \geq n+1}} |a_i b_j \zeta^{i+j}|$$

tend vers 0 lorsque n tend vers ∞. Mais :

$$\left| \sum_{\substack{0 \leq i,j \leq n \\ i+j \geq n+1}} a_i b_j \zeta^{i+j} \right| \leq \sum_{\substack{0 \leq i,j \leq n \\ i+j \geq n+1}} |a_i b_j \zeta^{i+j}|,$$

donc $|s_n t_n - u_n|$ tend aussi vers 0 lorsque n tend vers ∞. □

3.VII.B. Suites doubles. — Cette partie sert surtout de préparation à la composition de séries entières. Cependant, elle peut être lue indépendamment de celle-ci, pour le moment on se soucie de série numériques à double entrée.

3.VII.B.1. Convergence uniforme de suites doubles. — Dans le même esprit que le théorème d'interversion de limites, nous pouvons traiter les suites doubles $(u_{n,p}) : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{C}$. On considère $(u_{n,p})$ comme une suite de fonctions (f_n) où $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ est définie par $f_n(p) = u_{n,p}$. Une fonction f sur $P = \mathbb{N}$ est identifiée à une suite $f = (v_p)$ définie par $f(p) = v_p$, pour tout $p \in \mathbb{N}$. Ainsi, la *norme infini* sur $P = \mathbb{N}$ de $f = (v_p)$ est :

$$\|f\|_\infty = \sup_{p\in\mathbb{N}} |v_p|,$$

si la suite (v_p) est bornée, ou $\|f\|_\infty = +\infty$ autrement.

Une suite (f_n) est identifiée à une suite double $(u_{n,p})$ définie, pour $n, p \in \mathbb{N}$, par $u_{n,p} = f_n(p)$. La suite (f_n) converge uniformément vers f si, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geq n_\varepsilon$, alors :

$$\|f - f_n\|_\infty = \sup_{p\in\mathbb{N}} |u_{n,p} - v_p| < \varepsilon.$$

Proposition 3.VII.2. — *Soit $(u_{n,p})$ une suite double et notons $f_n(p) = u_{n,p}$. Supposons que (f_n) soit uniformément convergente sur $\mathbb{N}$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $\lim_{p\to\infty} u_{n,p} = w_n \in \mathbb{C}$ avec (w_n) convergente. Alors :*

$$\lim_{p\to\infty} \lim_{n\to\infty} u_{n,p} = \lim_{n\to\infty} \lim_{p\to\infty} u_{n,p}.$$

Démonstration. — Soit $\varepsilon > 0$ et $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_1$ implique $|w_n - w| < \varepsilon/3$, où w est la limite de (w_n) i. e. :

$$w = \lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} \lim_{p\to\infty} u_{n,p}.$$

Soit f la limite uniforme de (f_n) et notons $v_p = f(p)$. On a facilement $v_p = \lim_{n\to\infty} u_{n,p}$ pour tout p. Soit $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq n_2$, on ait :

$$\|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pour $p \in \mathbb{N}$ on a $|u_{n,p} - v_p| \leq \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon/3$.

Choisissons $n \geq \max\{n_1, n_2\}$. On a alors :

$$|v_p - w| \leq |w - w_n| + |u_{n,p} - w_n| + |u_{n,p} - v_p| < |u_{n,p} - w_n| + \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour pour $p \geq p_0$, on ait $|u_{n,p} - w_n| < \varepsilon/3$. Donc pour $p \geq p_0$ on a :

$$|v_p - w| < |u_{n,p} - w_n| + \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

□

3.VII.B.2. Fubini discret. — Le théorème de Fubini discret porte le même nom que le théorème de Fubini d'interversion des bornes pour les intégrales doubles et consiste aussi à intervertir les bornes, cette fois d'une série double.

Théorème 3.VII.3. — *Soit $(u_{n,p})$ une suite complexe double. Supposons que :*

i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_p u_{n,p}$ est absolument convergente ;

ii) la série $\sum_n \sum_{p=0}^{\infty} |u_{n,p}|$ est convergente.

Alors on a la formule d'inversion :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} u_{n,p} = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,p}.$$

Démonstration. — On pose $g_n(p) = \sum_{j=0}^{p} u_{n,j}$ et $z_n = \sum_{j=0}^{\infty} \left|u_{n,j}\right|$, donc $\sum_{n\geq 0} z_n$ est une série positive convergente. Soit $f_n = \sum_{i=0}^{n} g_i$. Nous avons ainsi une suite de fonctions (f_n) sur $\mathbb{N}$, donnée par une suite double que l'on note $(G_{n,p})$, liées par :

$$G_{n,p} = f_n(p) = \sum_{k=0}^{n} g_k(p) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{p} u_{k,j}.$$

D'après la proposition 3.VII.2, il suffit de montrer que (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{N}$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $\lim_{p\to\infty} G_{n,p} = w_n \in \mathbb{C}$ avec (w_n) suite convergente. En effet, on aura alors :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} u_{n,p} = \lim_{n\to\infty}\lim_{p\to\infty} G_{n,p} = \lim_{p\to\infty}\lim_{n\to\infty} G_{n,p} = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,p}.$$

Vérifions donc les conditions de la proposition. D'abord, $(f_n) = \sum_n g_n$ converge uniformément si $\sum g_n$ converge normalement sur $\mathbb{N}$, ce qui est le cas car $\sum z_n$ converge et :

$$\|g_n\|_\infty = \sup_{p\in\mathbb{N}} \left|\sum_{j=0}^{p} u_{n,j}\right| \leq \sup_{p\in\mathbb{N}} \sum_{j=0}^{p} \left|u_{n,j}\right| = \sum_{j=0}^{\infty} \left|u_{n,j}\right| = z_n.$$

Ensuite, pour $n \in \mathbb{N}$ on a que $\lim_{p\to\infty} G_{n,p}$ existe. En effet, $\sum_p u_{n,p}$ converge (car elle converge absolument) donc on peut écrire par somme (finie) de limites :

$$\lim_{p\to\infty} G_{n,p} = \lim_{p\to\infty} \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{p} u_{k,j} = \sum_{k=0}^{n} \lim_{p\to\infty} \sum_{j=0}^{p} u_{k,j} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{\infty} u_{k,j}.$$

Enfin, si on note $w_n = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{\infty} u_{k,j}$ on doit montrer que $(w_n) = \sum_n \sum_{j=0}^{\infty} u_{n,j}$ converge. C'est le cas, car $\sum z_k$ converge et :

$$\left|\sum_{j=0}^{\infty} u_{k,j}\right| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left|u_{k,j}\right| \leq z_k.$$

□

Deuxième preuve. — On donne une démonstration du théorème ne faisant pas appel à la proposition 3.VII.2. On pose $g_n(p) = \sum_{j=0}^{p} u_{n,j}$ et $w_n = \sum_{j=0}^{\infty} \left|u_{n,j}\right|$, donc $\sum_{n\geq 0} w_n$ est une série positive convergente.

Observons que $\sum g_n$ est une série de fonctions normalement convergente sur $\mathbb{N}$ car :

$$\|g_n(p)\|_\infty = \sup_{p\in\mathbb{N}} \left|\sum_{j=0}^{p} u_{n,j}\right| \leq \sup_{p\in\mathbb{N}} \sum_{j=0}^{p} \left|u_{n,j}\right| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left|u_{n,j}\right| = w_n,$$

et $\sum_{n\geq 0} w_n$ est une série convergente.

On pose $G_n = \sum_{i=0}^{n} g_i$ et on obtient une suite (G_n) de fonctions uniformément convergente sur $\mathbb{N}$, vers la fonction $G : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ définie comme somme de la série i. e. par :

$$G(p) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{p} u_{n,j}.$$

Remarquons que, pour $j \in \mathbb{N}$, $\sum_n u_{n,j}$ converge absolument, car $\sum w_n$ converge et :

$$\left|u_{n,j}\right| \leq \sum_{p=0}^{\infty} \left|u_{n,p}\right| = w_n.$$

Donc, par somme finie de séries convergentes on obtient :

$$G(p) = \sum_{j=0}^{p} \sum_{n=0}^{\infty} u_{n,j}.$$

Maintenant, nous allons vérifier que $\lim_{p\to\infty} G_n(p)$ existe finie pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n\to\infty} \lim_{p\to\infty} G_n(p)$ existe finie.

Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a $\sum_p u_{i,p}$ absolument convergente, donc $\lim_{p\to\infty} g_i(p) = \sum_{p=0}^{\infty} u_{i,p}$ existe finie. Par somme finie de limites on écrit donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{p\to\infty} \sum_{i=0}^{n} g_i(p) = \sum_{i=0}^{n} \lim_{p\to\infty} g_i(p),$$

et cette limite existe finie. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a donc :

$$\lim_{p\to\infty} G_n(p) = \lim_{p\to\infty} \sum_{i=0}^{n} g_i(p) = \sum_{i=0}^{n} \lim_{p\to\infty} g_i(p) = \sum_{i=0}^{n} \lim_{p\to\infty} \sum_{j=0}^{p} u_{i,j} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{p=0}^{\infty} u_{i,p}.$$

Enfin il faut vérifier que $\lim_{n\to\infty} G_n(p)$ existe finie. Mais ceci est clair car :

$$\left|\sum_{p=0}^{\infty} u_{i,p}\right| \leq \sum_{p=0}^{\infty} \left|u_{i,p}\right| = w_n$$

et $\sum w_n$ converge. On peut donc appliquer la proposition 3.VII.2 et écrire :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} u_{n,p} = \lim_{n\to\infty}\lim_{p\to\infty} G_n(p) = \lim_{p\to\infty}\lim_{n\to\infty} G_n(p) =$$

$$= \lim_{p\to\infty} G(p) = \lim_{p\to\infty}\sum_{j=0}^{p}\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,j} = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,p}.$$

□

Remarque 3.VII.4. — L'échange entre somme et limite n'est plus valide en général si la convergence est simple mais pas uniforme. Par exemple, on peut considérer :

$$u_{n,p} = \frac{p}{(n+p)(n+p-1)}.$$

On obtient $\lim_{p\to\infty} u_{n,p} = 0$ donc $\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{p\to\infty} u_{n,p} = 0$. Par contre, comme $u_{n,p} = n/(n+p) - (n-1)/(n+p-1)$, la somme partielle jusqu'au rang n vaut $n/(n+p)$, ainsi $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n,p} = 1$ donc $\lim_{p\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_{n,p} = 1$.

3.VII.C. Composition et inversion de séries. — Nous allons voir ici qu'il est possible, sous certaines conditions portant sur les rayons de convergence, de remplacer la variable d'une série entière par la somme d'une deuxième série entière, en obtenant une fonction qui s'avère être la somme d'une nouvelle série entière.

3.VII.C.1. Série composée. — Le théorème de Fubini discret permet d'étudier la composition de séries entières, ce qui revient à remplacer la variable d'une série entière par la fonction somme d'une deuxième série entière. Il en résulte (sous certaines hypothèses portant sur les rayons de convergence) une fonction qui est encore la somme d'une série entière.

Théorème 3.VII.5. — *Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ séries entières, de rayon de convergence $R > 0$ et $S > 0$, et notons respectivement f et g les fonctions somme des deux séries. Supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, avec $0 < \alpha < S$, tel que :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|\alpha^n < R.$$

Alors il existe une série entière $\sum c_n z^n$, de rayon de convergence $T \geq \alpha$, telle que pour tout $\zeta \in D(\alpha)$ on ait :

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\zeta^n = f(g(\zeta)).$$

Démonstration. — Soit $\zeta \in \mathbb{C}$, avec $|\zeta| \leq \alpha$. On a $|\zeta| < S$ donc $g(\zeta)$ est défini. On pose :

$$G(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} |b_n||\zeta|^n.$$

Ceci est bien défini aussi. Notre hypothèse est $G(\alpha) < R$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On s'intéresse à $g(\zeta)^n$, qui peut être exprimé comme somme de la série obtenue comme produit de n fois la série $\sum b_p \zeta^p$ avec elle-même, autrement dit :

$$g(\zeta)^n = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{i_1+\cdots+i_n=p} b_{i_1} \cdots b_{i_n} \zeta^p.$$

Posons :

$$\begin{aligned} d_{n,p} &= \sum_{i_1+\cdots+i_n=p} b_{i_1} \cdots b_{i_n}, \\ u_{n,p} &= a_n d_{n,p} \zeta^p, \end{aligned}$$

donc $\left|u_{n,p}\right| = |a_n||d_{n,p}||\zeta|^p$. On a alors :

$$\begin{aligned} g(\zeta)^n &= \sum_{p=0}^{\infty} d_{n,p} \zeta^p, \\ f(g(\zeta)) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} a_n d_{n,p} \zeta^p = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} u_{n,p}. \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse $|\zeta| \leq \alpha$:

$$|g(\zeta)^n| \leq \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{i_1+\cdots+i_n=p} |b_{i_1}| \cdots |b_{i_n}||\zeta|^p \leq \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{i_1+\cdots+i_n=p} |b_{i_1}| \cdots |b_{i_n}|\alpha^p = G(\alpha)^n.$$

Puisque $G(\alpha) < R$, la série $\sum |a_n| G(\alpha)^n$ est convergente. Il en est alors de même de $\sum a_n g(\zeta)^n$, car $|a_n||g(\zeta)|^n$ converge par majoration de séries positives. Par construction $\sum a_n g(\zeta)^n$ converge vers $f(g(\zeta))$.

On peut alors écrire, d'après le théorème d'interversion 3.VII.3 ou de Fubini discret :

$$f(g(\zeta)) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n d_{n,p} \zeta^p.$$

ce qui exprime bien $f(g(\zeta))$ comme somme d'une série entière, en posant $c_p = \sum_{n=0}^{\infty} a_n d_{n,p}$ ce qui correspond à écrire $f(g(\zeta)) = \sum_{p=0}^{\infty} c_p \zeta^p$. □

3.VII.C.2. Inverse d'une série. — La composition des séries permet d'écrire l'inverse d'une série entière ne s'annulant pas en 0.

Proposition 3.VII.6. — *Soit $\sum c_n z^n$ une série entière, de rayon de convergence $R > 0$ et avec $c_0 \neq 0$. Alors il existe une série entière $\sum d_n z^n$ de rayon de convergence $S > 0$ telle que, pour tout $\zeta \in \mathbb{C}$ avec $|\zeta| < \min(R, S)$, on ait :*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} d_n \zeta^n\right) = 1.$$

Démonstration. — Soit $h(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n$ pour $|\zeta| < R$. Posons :

$$g(\zeta) = 1 - \frac{1}{c_0} h(\zeta) = -\frac{1}{c_0} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \zeta^n,$$

donc :

$$h(\zeta) = c_0(1 - g(\zeta)).$$

L'inverse de $h(\zeta)$ peut alors s'écrire :

$$\frac{1}{h(\zeta)} = \frac{1}{c_0} \frac{1}{1 - g(\zeta)}.$$

On considère alors la série entière $\frac{1}{c_0} \sum z^n$, de rayon de convergence 1, et de somme $1/c_0$ en 0. La fonction f somme de cette série est :

$$f(\zeta) = \frac{1}{c_0} \frac{1}{1-\zeta} = \frac{1}{c_0} \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n.$$

Nous pouvons écrire :

$$\frac{1}{h(\zeta)} = \frac{1}{c_0} \frac{1}{1 - g(\zeta)} = f(g(\zeta)).$$

D'après le théorème sur la composition de séries entières, on cherche $\alpha \in]0, R[$ tel que :

$$\frac{1}{|c_0|} \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \alpha^n < 1.$$

Posons $G(z) = 1/|c_0| \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| z^n$, et remarquons que $G(z)$ est continue sur $D(0,R)$ avec $G(0) = 0$. Il existe alors $\alpha > 0$ tel que $|G(\alpha)| < 1$. Le théorème sur la composition de séries entières s'applique et dit que :

$$\frac{1}{h(\zeta)} = f(g(\zeta)) = \frac{1}{c_0} \sum_{n=0}^{\infty} g(\zeta)^n$$

est somme d'une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$ de rayon de convergence $S \geq \alpha > 0$. □

Exercice 1. — On obtient les développements :

$$\frac{1}{az+b} = \frac{1}{b} \frac{1}{1 + \frac{a}{b} z} = \frac{1}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-a}{b} \right)^n z^n, \qquad R = \frac{|b|}{|a|}.$$

$$\frac{1}{1-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}, \qquad R = 1.$$

3.VII.D. Fractions rationnelles. — Soit P, Q polynômes à coefficients complexes en la variable X, avec $Q \neq 0$ et considérons la fonction

$$f(\zeta) = \frac{P(\zeta)}{Q(\zeta)},$$

dont le domaine de définition est $P = \mathbb{C} \setminus Z(Q)$, où $Z(Q) = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid Q(\zeta) = 0\}$ est l'ensemble des racines de Q. Le théorème de d'Alembert-Gauss affirme que l'on peut écrire :

$$Q(X) = a \prod_{i=1}^{d} (X - \alpha_i)^{r_i},$$

pour certains $r_i > 0$ entiers et où $Z(Q) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$.

Théorème 3.VII.7. — *Il existe uniques un polynôme F et $a_{i,j} \in \mathbb{C}$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$ et $j \in \{1, \dots, n_i\}$ tels que :*

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = F(X) + \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{a_{i,j}}{(X - \alpha_i)^j}.$$

Si $\alpha_i \neq 0$ pour tout i, alors la fonction f est développable en série entière autour de 0 *avec un rayon de convergence égal à* $\min\{|\alpha_i| | i = 1, \dots, n\}$, *le développement étant donné comme somme de F et des développements de $a_{i,j}/(\zeta - \alpha_i)^j$.*

La recette pour développer f en série entière est donc la suivante :
— Utiliser que, pour $\zeta \in D(0,1)$ et r entier positif on a :

$$\frac{1}{(1-\zeta)^r} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r-1} \zeta^n.$$

— Déduire que, pour $\zeta \in D(0, |\alpha|)$, on a :

$$\frac{1}{(\zeta - \alpha)^r} = (-1)^r \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{n+r-1}{r-1}}{\alpha^{r+n}} \zeta^n.$$

— Écrire $F = \sum b_n X^n$ puis pour $\zeta \in D(0, R)$:

$$f(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{g(\zeta)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(b_n + \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{n_i} (-1)^j a_{i,j} \frac{\binom{n+j-1}{j-1}}{\alpha_i^{j+n}} \right) \zeta^n.$$

La démonstration du premier énoncé de ce théorème relève de l'algèbre et ne sera pas proposée ici. Par contre, pour ce qui concerne l'énoncé sur le développement de f, tout découle des propriétés que nous avons déjà analysées des rayons de convergence des séries entières et de la sommation et unicité des développements en série.

3.VIII. La fonction exponentielle complexe

Considérons la série entière exponentielle, de rayon de convergence infini :

$$e^z = \exp(z) = \sum_{n\geq 0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

3.VIII.A. Propriétés de base. —

Théorème 3.VIII.1. — *La fonction exponentielle complexe est indéfiniment $\mathbb{C}$-dérivable sur $\mathbb{C}$, prend valeurs dans $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et pour tout $z, w \in \mathbb{C}$ nous avons :*

$$e^{z+w} = e^z e^w, \qquad e^{-z} = \frac{1}{e^z}.$$

De plus, la fonction exp *est indéfiniment $\mathbb{C}$-dérivable sur $\mathbb{C}$ et pour tout $k \geq 1$ sa dérivée d'ordre k est la fonction* exp *elle même.*

Démonstration. — Soient $z, w \in \mathbb{C}$. Calculons $e^z e^w$:

$$\begin{aligned} e^z e^w &= \left(\sum_{n\geq 0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n\geq 0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}\right) = \sum_{n\geq 0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} = \\ &= \sum_{n\geq 0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k w^{n-k} = \sum_{n\geq 0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \\ &= \sum_{n\geq 0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z+w)^n = e^{z+w}. \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour n'importe quel $z, w \in \mathbb{C}$, on peut prendre $w = -z$ et remarquer $e^0 = 0$ pour avoir $e^z e^{-z} = 1$ donc $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$.

La dérivabilité est claire puisque notre série converge sur $\mathbb{C}$, et la dérivée coïncide avec exp simplement en regardant les coefficients de la série dérivée. □

3.VIII.B. Exponentielle réelle. —

Théorème 3.VIII.2. — *L'exponentielle réelle est un isomorphisme de groupes :*

$$\exp : (\mathbb{R}, +, 0) \to (\mathbb{R}_{>0}, \cdot, 1).$$

Démonstration. — Il est clair que l'exponentielle complexe se restreint à une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, dont la dérivée est la fonction même. Il est aussi évident que $e^r > 0$, quel que soit $r \geq 0$. Donc d'après la relation $e^{-r} = \frac{1}{e^r}$ on voit que $e^{-r} > 0$ aussi pour tout $r \geq 0$. Donc exp est une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_{>0}$, qui est un morphisme du groupe $(\mathbb{R}, +, 0)$ vers $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot, 1)$ d'après les relations multiplicatives du théorème 3.VIII.1.

De plus, l'exponentielle réelle est strictement croissante (donc injective) puisque sa dérivée est partout strictement positive. On voit que la fonction exponentielle est strictement convexe. On a aussi :

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty.$$

On en déduit que, pour tout $y > 1$, il existe $x \in \mathbb{R}$ satisfaisant à $e^x > y$, donc par les valeurs intermédiaires (cf. plus loin la proposition 4.IV.7) on voit que y admet un antécédent par rapport à l'exponentielle : c'est le logarithme naturel de y. Au passage, ceci définit le nombre de Néper $e = e^1$ et la fonction logarithme naturel ou népérien. Celle-ci est donc une application bijective indéfiniment dérivable $(\mathbb{R}_{>0}, +, 1) \to (\mathbb{R}, +, 0)$. □

3.VIII.C. Exponentielle complexe et trigonométrie. —

Définition 3.VIII.3. — On définit le sinus et cosinus d'un réel y par :

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y.$$

Théorème 3.VIII.4. — *L'exponentielle donne un morphisme de groupes surjectif :*

$$\begin{aligned}(\mathbb{R}, +, 0) &\to (U, \cdot, 1)\\ y &\mapsto e^{iy} = \cos y + i \sin y,\end{aligned}$$

ou U est le cercle unitaire :

$$U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\},$$

et $\mathbb{R}$ est l'axe $i\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Le noyau de ce morphisme est $2\pi i\mathbb{Z}$.

Démonstration. — D'abord, par séparation des parties réelle et imaginaire, de la relation $(e^{ix})' = ie^{ix}$ on déduit les relations classiques :

$$\cos' x = -\sin x, \qquad \sin' x = \cos x.$$

De la relation $e^{ix}e^{-ix} = 1$ on déduit :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

On a $\cos(0) = 1$, donc $\cos x > 0$ pour tous les x dans un voisinage suffisamment petit de 0. Par contre, il existe bien des réels x tels que $\cos x = 0$. Autrement, on aurait $\cos x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $\sin x$ strictement croissante sur $\mathbb{R}_{>0}$, donc strictement positive sur $\mathbb{R}_{>0}$. Ainsi, on pose :

$$\begin{aligned}g :]x, +\infty[&\to \mathbb{R}\\ y &\mapsto g(y) = \cos y + y \sin x.\end{aligned}$$

On aurait alors g indéfiniment dérivable et :

$$g'(y) = -\sin y + \sin x < 0,$$

puisque sin est strictement croissante et $x < y$. Mais $\sin x > 0$ et $|\cos y| \leq 1$ donc :

$$\lim_{y \to +\infty} g(y) = +\infty,$$

ce qui est une contradiction.

On définit alors π comme le double de la borne inférieure de l'ensemble des zéros de la fonction cosinus, restreinte à $]0, +\infty[\to \mathbb{R}$. On a alors :

$$\cos(\pi/2) = 0.$$

En effet, comme $\pi/2$ est la borne inférieure de l'ensemble X des zéros de cos, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on peut trouver un élément $u_n \in X$ tel que $\pi/2 < u_n < \pi_2 + 1/n$. Donc évidemment la suite (u_n) tend vers $\pi/2$, et comme $\cos(u_n) = 0$ pour tout u_n on a aussi $\cos(\pi/2) = 0$ par continuité. Ainsi :

$$\sin(\pi/2) =, 1$$

parce que cos est positive sur $[0, \pi/2[$, donc sin est croissante sur cet intervalle dons $\sin(\pi/2) > 0$. On en obtient la formule célèbre d'Euler :

$$e^{\pi i} = -1.$$

Il s'en suit que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a :

$$e^{i(x+2k\pi)} = e^{ix},$$

donc l'exponentielle est périodique de période $2\pi i$. L'affirmation sur le noyau de l'exponentielle unitaire s'ensuit. Il est aussi clair par les valeurs intermédiaires (cf. la proposition 4.IV.7) que $\sin x$ prend toutes les valeurs entre -1, et de même pour cos. Donc un point $w \in U$ s'écrit (a, b) avec $a^2 + b^2 = 1$. Supposons $a, b \geq 0$. Il existe alors $x \in [0, \pi/2]$. De plus, $\sin x^2 = b^2$ par soustraction de $a^2 = \cos^2 x$ de 1. Ainsi $\sin x = \pm b$, mais $\sin x \geq 0$ pour $x \in [0, \pi/2]$. Quant aux valeurs (a, b) pas forcément positives, on peut procéder par symétrie. □

3.VIII.D. Interprétation algébrique. —

Théorème 3.VIII.5. — *L'exponentielle* exp : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ *est un morphisme surjectif de groupes* $(\mathbb{C}, +, 0) \to (\mathbb{C}, \cdot, 1)$ *dont le noyau est* $2i\pi\mathbb{Z}$.

Démonstration. — Il est clair que exp est un morphisme de groupes. En écrivant $z = x + iy$, on voit que :

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

On voit alors que l'exponentielle est surjective. En effet, étant donné $w \in \mathbb{C}^*$, on écrira $w = |w|\frac{w}{|w|}$. Or $\frac{w}{|w|} \in U$ donc il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $(\cos y + i \sin y) = \frac{w}{|w|}$; de plus bien sûr il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $e^x = |w|$. Donc en posant $z = x + iy$ on obtient $e^z = w$.

Ainsi l'exponentielle est surjective. Pour voir quelle est le noyau, on se demande pour quels $z \in \mathbb{C}$ a-t-on $e^z = 1$. Si on écrit $z = x + iy$, on voir que $e^x = 1$ et $(\cos y + i \sin y) = 1$, donc $x = 0$ et $y \in 2\pi i\mathbb{Z}$. □

CHAPITRE 4

L'INTÉGRALE DE RIEMANN

L'intégrale de Riemann se définit de façon élémentaire à travers les fonctions en escalier ou alors via les sommes de Darboux. Nous introduirons ici les deux procédés, aussi bien qu'une définition équivalente à l'intégrabilité de Riemann à travers les suites associées, plus proche des techniques propres de l'intégrale de Lebesgue.

4.I. Fonctions intégrables au sens de Riemann

4.I.A. Fonctions en escalier. — La notion d'intégrabilité au sens de Riemann repose sur le procédé d'approximation d'une fonction par des fonctions constantes par morceaux, que l'on appelle fonctions en escalier.

4.I.A.1. Fonctions en escalier et subdivisions. — Une fonction est en escalier sur un intervalle $I = [a,b]$ si elle est constante par morceaux, les morceaux en question étant définis à partir d'une subdivision de I en sous intervalles.

Définition 4.I.1. — Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Une *subdivision* de $[a,b]$ est une liste ordonnée de nombres $\sigma = (x_0,\ldots,x_n)$, avec $x_i \in \mathbb{R}$ et :

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

On appelle n la longueur de la subdivision. On appelle *pas* de la subdivision σ la quantité $\delta(\sigma)$ suivante :

$$\delta(\sigma) = \max\{x_i - x_{i-1} \mid i \in \{1,\ldots,n\}\}.$$

On dit qu'une subdivision σ' *raffine* σ si tous les points de σ' appartiennent à σ. Si σ et σ' sont subdivisions de I, on peut considérer la *réunion* σ'' des points σ et de σ' comme subdivision de I ; σ'' raffine à la fois σ et σ'.

On peut donner la même définition de subdivision lorsque I n'est pas fermé comme subdivision de la clôture.

Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction g sur $[a,b]$ est dite *en escalier* s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0,\ldots,x_n)$ et des constantes $(m_1,\ldots,m_n)$ telles que g soit de la forme :

$$g(x) = m_i, \qquad \forall x \in]x_{i-1}, x_i[.$$

On note $m = (m_1, \dots, m_n)$. Pour dire que g est en escalier par rapport à la subdivision $\sigma = (x_0 < \cdots < x_n)$ de I et que $g(x) = m_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$ et $i \in]x_{i-1}, x_i[$ on écrira $g = E(\sigma, m)$.

4.I.A.2. Intégrale de fonctions en escalier. — L'*intégrale* de $g = E(\sigma, m)$ sur la subdivision σ est définie de la manière suivante :

$$I(g, \sigma) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}).$$

On peut montrer que cette valeur ne dépend que de g, et non de la subdivision σ de g choisie. On note alors :

$$\int_a^b g(t)dt = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}).$$

Preuve que l'intégrale ne dépend pas de la subdivision. — Soit σ' obtenue de σ en ajoutant un seul point, i.e. :

$$\sigma' = a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < y < x_i < \cdots < x_n = b.$$

Comme $g(x) = m_i$ pour tout $x \in]x_{i-1}, x_i[$, on a $g(x) = m_i$ pour tout $x \in]x_{i-1}, y[$ et aussi pour tout $x \in]y, x_i[$. De ce fait, on a que $m_i(x_i - y) + m_i(y - x_{i-1}) = m_i(x_i - x_{i-1})$. Donc :

$$I(g, \sigma) = I(g, \sigma').$$

Maintenant, il est clair que toute subdivision σ' plus fine que σ s'obtient de σ par un nombre fini d'ajouts d'un point à la subdivision, ce qui ne change jamais l'intégrale. On a alors l'indépendance de l'intégrale par raffinement de la subdivision.

Pour terminer la preuve, étant données deux subdivisions quelconque, on considère leur réunion, qui constitue un raffinement des deux subdivisions à la fois. Comme l'intégrale sur la réunion est égale aux deux intégrales d'après l'indépendance par raffinement, on voit que les deux intégrales sur les subdivisions de départ sont égales. □

4.I.A.3. Propriété de l'intégrale d'une fonction en escalier. — Nous allons utiliser la linéarité et la croissance de l'intégrale pour fonctions intégrables. Celles-ci découlent de la linéarité et de la croissance de l'intégrale pour les fonctions en escalier.

Proposition 4.I.2. — *Soit g et h fonctions en escalier sur un intervalle $[a, b]$. Alors pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\int_a^b (\lambda g(t) + \mu h(t))dt = \lambda \int_a^b g(t)dt + \mu \int_a^b h(t)dt.$$

Si $g \leq h$, alors :

$$\int_a^b g(t)dt \leq \int_a^b h(t)dt.$$

Démonstration. — On se place sur une subdivisons qui raffine à la fois celle de g et celle de h, par exemple leur réunion. Le résultat sur la linéarité est alors évident.

Pour la majoration, on observe d'abord que si f est en escalier et positive, alors son intégrale est positive ; ce qui est évident. Pour conclure, on considère $f = h - g$ et on utilise la linéarité. □

4.I.B. Fonctions intégrables. — Nous pouvons maintenant définir l'intégrabilité d'une fonction et décrire des classes de fonctions intégrables.

4.I.B.1. Fonctions intégrables et fonctions en escalier. — Nous donnons d'abord la définitions de fonction intégrable au sens de Riemann (nous dirons simplement *intégrable*) en termes de fonctions en escalier encadrant f.

Définition 4.I.3. — Soit f une fonction de variable réelle, définie sur un intervalle compact $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. On dit que f *est intégrable* (au sens de Riemann) sur $[a,b]$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe g,h fonctions en escalier sur $[a,b]$, avec $g \leq f \leq h$ et :

$$\int_a^b h(t)dt - \int_a^b g(t)dt < \varepsilon.$$

On peut remarquer que :

— Si $g \leq h$ alors $\int_a^b g(t)dt \leq \int_a^b h(t)dt$. Ainsi, en tout cas $\int_a^b h(t)dt - \int_a^b g(t)dt \geq 0$.

— Il est clair aussi qu'une fonction intégrable sur un intervalle compact est bornée, puisqu'elle doit être majorée et minorée par des fonctions en escaliers, qui sont bornées.

***Exemple 4.I.4* (Une fonction non intégrable).** — Soit f la fonction définie sur $[0,1] \subset \mathbb{R}$ qui vaut 0 sur les rationnels et 1 sur les irrationnels. Alors $g = 0$ est le plus grand minorant en escalier de f, et $h = 1$ en est le plus petit majorant en escalier de f. Mais :

$$\int_0^1 g(t)dt = 0, \qquad \int_0^1 h(t)dt = 1,$$

donc $\int_0^1 h(t)dt - \int_0^1 g(t)dt \geq 1$.

4.I.B.2. Intégrale supérieure et inférieure. — Nous avons défini la notion de fonction intégrable mais nous n'avons pas encore dit ce qu'est l'intégrale d'une telle fonction f. On pourra le faire en utilisant les notions d'intégrale supérieure (ou inférieure) définies comme borne inférieure (ou supérieure) des intégrales des fonctions en escalier qui majorent (ou minorent) notre fonction f. Quand ces deux intégrales sont égales, on les appellera l'intégrale de f.

Définition 4.I.5. — Soit f une fonction de variable réelle, définie et bornée sur un intervalle compact $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. On note :

$$\mathcal{E}_-(f) = \{g \text{ fonction en escalier sur } [a,b] \mid g(x) \leq f(x), \forall x \in [a,b]\}.$$
$$\mathcal{E}_+(f) = \{h \text{ fonction en escalier sur } [a,b] \mid h(x) \geq f(x), \forall x \in [a,b]\}.$$

Le premier de ces deux ensembles est non vide puisque f est minorée ; le deuxième l'est car f est majorée. On définit alors les intégrales *inférieure* et *supérieure* de f :

$$I_-(f) = \sup_{g\in\mathcal{E}_-(f)} \int_a^b g(t)dt.$$

$$I_+(f) = \inf_{h\in\mathcal{E}_+(f)} \int_a^b h(t)dt.$$

Le prochain résultat montre que cette définition est bien posée et que les deux intégrales, inférieure et supérieure, coïncident si et seulement si f est intégrable. Dans ce cas on définit $\int_I f$ comme la valeur de l'intégrale inférieure et supérieure.

Théorème 4.I.6. — *Pour qu'une fonction bornée définie sur un intervalle compact de* $\mathbb{R}$ *soit intégrable, il faut et il suffit que* $I_-(f) = I_+(f)$. *Dans ce cas on pose :*

$$\int_a^b f(t)dt = I_-(f) = I_+(f).$$

Si f *est intégrable sur* I *et* f_1 *coïncide avec* f *sauf sur un nombre fini de points de* I *alors* f_1 *est intégrable sur* I *et :*

$$\int_I f = \int_I f_1.$$

Démonstration. — Soit f majorée par v et minorée par u sur $[a,b]$. Posons :

$$X_- = \left\{ \int_a^b g(t)dt \mid g \in \mathcal{E}_-(f) \right\},$$

$$X_+ = \left\{ \int_a^b h(t)dt \mid h \in \mathcal{E}_+(f) \right\}.$$

Il est clair que tout élément de X_+ est un majorant de X_- et que tout élément de X_- est un minorant de X_+. De plus, $(b-a)u$ appartient à X_- et $(b-a)v$ appartient à X_+. Les deux nombres $I_-(f)$ et $I_+(f)$ existent donc finis et $I_-(f) \le I_+(f)$.

Revenons à la preuve. Soit f intégrable et fixons $\varepsilon > 0$. Il existent alors $x_- \in X_-$ et $x_+ \in X_+$ tels que $x_+ - x_- < \varepsilon$. On a donc :

$$0 \le I_+(f) - I_-(f) \le x_+ - x_- < \varepsilon,$$

donc :

$$I_+(f) = I_-(f).$$

Réciproquement, si $I_+(f) = I_-(f)$, écrivons $a = I_+(f) = I_-(f)$. D'après les propriétés des bornes inférieure et supérieure, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe alors $x_+ \in X_+$ et $x_- \in X_-$ tels que :

$$x_+ < a + \frac{\varepsilon}{2}, \qquad x_- > a - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc :

$$x_+ - x_- < a + \frac{\varepsilon}{2} - \left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon.$$

Si f est intégrable sur I et f_1 coïncide avec f sauf sur les points $y_1,\dots,y_m$ de I alors on forme une subdivision τ de I avec les points $y_1,\dots,y_m$. Ainsi, si h et g sont en escalier sur I et $g \le f \le h$, on peut supposer que g et h soient en escalier pour une subdivision commune σ puis former une nuovelle subdivision ρ de I par réunion de σ et $y_0,\dots,y_m$. On peut alors définir h_1 et g_1 en escalier sur la subdivision ρ en déclarant $g_1(x) = g(x)$ et $h_1(x) = h(x)$ pour tout x dans l'un des intervalles ouverts de ρ, puis $g_1(x) = h_1(x) = f_1(x)$ pour tout point x point de ρ. On a donc $\int_I g_1 = \int_I g$ et $\int_I h_1 = \int_I h$. Ceci permet de voir que f_1 est aussi intégrable et que $\int_I f = \int_I f_1$. □

Remarque 4.I.7. — Si $f_1 \le f_2$ sont intégrables sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f_1(t)dt \le \int_a^b f_2(t)dt$. De même si $f_1 \le f_2$ sauf pour un nombre fini de points de I.

Démonstration. — Si $f_1 \le f_2$, alors c'est clair, puisque $\mathcal{E}_-(f_1) \subset \mathcal{E}_-(f_2)$. Si $f_1 \le f_2$ sauf sur un nombre fini de points $x_0 < \cdots < x_n$ de I, alors on peut modifier f_1 sur les points en question afin d'obtenir une fonction $g_1 \le f_2$ sur I et $\int_I f_1 = \int_I g_1$. □

4.I.C. Suites associées. — Une façon équivalente de définir la notion d'intégrabilité d'une fonction f est par l'existence d'une suite de fonctions en escalier (φ_n) qui encadre f, avec l'étendue de l'encadrement (ϑ_n) convergent vers 0 en intégrale.

Définition 4.I.8. — Soit f une fonction définie sur un intervalle compact $[a,b]$. Une paire de suites de fonctions en escalier (φ_n, ϑ_n) est *une suite associée* à f si :

i) pour tout point x de $[a,b]$ on a $|f(x) - \varphi_n(x)| \le \vartheta_n(x)$;

ii) on a $\lim_{n\to\infty} \int_a^b \vartheta_n(t)dt = 0$.

Théorème 4.I.9. — *Une fonction f bornée sur un intervalle compact $[a,b]$ y est intégrable si et seulement si elle possède une suite associée (φ_n, ϑ_n). Dans ce cas on a :*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

Démonstration. — Soit f intégrable. Pour tout n entier non nul, il existe alors deux fonctions en escalier g_n et h_n telles que :

$$g_n \le f \le h_n, \qquad \text{sur } [a,b] \qquad \text{et :} \qquad \int_a^b h_n(t)dt - \int_a^b g_n(t)dt < \frac{1}{n}.$$

On pose alors :

$$\vartheta_n = \frac{h_n - g_n}{2}, \qquad \varphi_n = \frac{h_n + g_n}{2}.$$

Remarquons que ceci est équivalent aux relations :

$$h_n = \varphi_n + \vartheta_n, \qquad g_n = \varphi_n - \vartheta_n.$$

On trouve donc :

$$\varphi_n - \vartheta_n = g_n \le f \le h_n = \vartheta_n + \varphi_n, \qquad \vartheta_n \ge 0.$$

Ceci veut dire :

$$|f-\varphi_n| \le \vartheta_n.$$

De plus, on voit :

$$\int_a^b \vartheta_n(t)dt = \frac{1}{2}\int_a^b g_n(t)dt - \frac{1}{2}\int_a^b h_n(t)dt < \frac{1}{2n}.$$

Ainsi, $\lim_{n\to\infty}\int_I \vartheta_n = 0$.

Réciproquement, si on part de (φ_n, ϑ_n) suite associée à f, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N tel que $\int_a^b \vartheta_n(t)dt < \varepsilon/2$, quel que soit $n \ge N$; de plus $|f-\varphi_n| \le \vartheta_n$. Si on pose $h_n = \varphi_n + \vartheta_n$ et $g_n = \varphi_n - \vartheta_n$, de $|f-\varphi_n| \le \vartheta_n$ on déduit $g_n \le f \le h_n$. De plus, on trouve :

$$\int_a^b h_n(t)dt - \int_a^b g_n(t)dt = 2\int_a^b \vartheta_n(t)dt < \varepsilon.$$

Pour l'égalité des intégrales, on écrit $\varphi_n - \vartheta_n \le f \le \varphi_n + \vartheta_n$, donc :

$$\int_a^b \varphi_n(t)dt - \int_a^b \vartheta_n(t)dt \le \int_a^b f(t)dt \le \int_a^b \varphi_n(t)dt + \int_a^b \vartheta_n(t)dt,$$

et on conclut, comme $\lim_{n\to\infty}\int_a^b \vartheta_n(t)dt = 0$, que $\lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$. □

4.I.D. Sommes de Darboux et sommes de Riemann. —

4.I.D.1. Sommes de Darboux. — La somme de Darboux (inférieure) d'une fonction f sur un intervalle compact I associée à une subdivision σ de I est la somme des aires des rectangles dont la basa est l'un des intervalles définis par σ et dont la hauteur est la borne inférieure de f sur un cet intervalle. De même on a une somme de Darboux supérieure pour la borne supérieure. Ce qui nous intéresse est de montrer que ces sommes convergent vers l'intégrale de f sur I si f est intégrable sur I.

Définition 4.I.10. — Soit f une fonction bornée sur un intervalle compact I et soit $\sigma = (x_0 < \cdots < x_n)$ une subdivision de I. On note, pour $i \in \{0,\dots,n\}$:

$$m_i^- = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \qquad m_i^+ = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

On appelle *somme de Darboux inférieure et supérieure* de f sur σ les quantités $D^-(f,\sigma)$ et $D^+(f,\sigma)$ suivantes :

$$D^-(f,\sigma) = \sum_{i=1}^n m_i^-(x_i - x_{i-1}), \qquad D^+(f,\sigma) = \sum_{i=1}^n m_i^+(x_i - x_{i-1}).$$

Théorème 4.I.11. — *Une fonction bornée sur I est Riemann-intégrable sur I si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe σ subdivision de I telle que :*

$$D^+(f,\sigma) - D^-(f,\sigma) < \varepsilon.$$

Si f est intégrable sur I, pour toute subdivision τ de I on a :

$$\int_I f \le D^+(f,\tau), \qquad \int_I f \ge D^-(f,\tau).$$

Démonstration. — Fixons $\varepsilon > 0$. Supposons qu'il existe σ subdivision de I telle que $D^+(f,\sigma) - D^-(f,\sigma) < \varepsilon$. Alors on définit g et h en escalier par $g(x) = m_i^-(f,\sigma)$ et $h(x) = m_i^+(f,\sigma)$ pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$ et pour tout $x \in [x_{i-1}, x_i[$. On pose aussi $g(b) = h(b) = f(b)$. On vérifie que $g \in \mathcal{E}_-(f)$ et $h \in \mathcal{E}_+(f)$, par exemple $f \leq h$ car $f(b) = h(b)$ et, pour tout $x \in I \setminus \{b\}$ il existe $i \in \{1,\dots,n\}$ tel que $x \in [x_{i-1}, x_i[$ donc $f(x) \leq \sup\{f(y) \mid y \in [x_{i-1}, x_i]\} = m_i^+(f,\sigma) = h(x)$. On montre ensuite $g \leq f$ par le même raisonnement. On a donc $\int_I h - \int_I g = D^+(f,\sigma) - D^-(f,\sigma) < \varepsilon$ et f est Riemann-intégrable.

Réciproquement, soit f intégrable sur I et fixons $\varepsilon > 0$. Il existe donc $(g,h) \in \mathcal{E}_-(f) \times \mathcal{E}_+(f)$ tel que :

$$\int_I h - \int_I g < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $\sigma = (x_0 < \cdots < x_n)$ une subdivision pour laquelle g et h sont en escalier. Il existe donc $p_1,\dots,p_n, q_1,\dots,q_n \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$ et pour un quelconque $x \in]x_{i-1}, x_i[$, on ait :

$$p_i = g(x) \leq f(x) \leq h(x) = q_i.$$

Notons $\delta = \min\{x_i - x_{i-1} \mid i \in [\![1,n]\!]\} > 0$. On a $\delta > 0$. Comme f est bornée sur I, il existe une constante $M \in \mathbb{R}_+^*$ telle que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in I$. Choisissons $\eta \in]0, \delta/2[$ tel que :

$$\eta < \frac{\varepsilon}{8nM}.$$

Considérons maintenant une nouvelle subdivision $\rho = (y_0 < \cdots < y_{2n+1})$ de I définie de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
y_0 &= a, \\
y_{2i} &= x_i - \eta, && \text{pour } i \in \{1,\dots,n\}, \\
y_{2i+1} &= x_i + \eta, && \text{pour } i \in \{0,\dots,n-1\}, \\
y_{2n+1} &= b.
\end{aligned}$$

Il s'agit effectivement d'une subdivision de I, que l'on se représente comme suit :

$$a = x_0 = y_0 < y_1 < \cdots < y_{2i} < x_i < y_{2i+1} < \cdots < y_{2n} < y_{2n+1} = x_n = b.$$

En effet, comme $\eta > 0$, on a $y_{2i} < y_{2i+1}$ pour chaque $i \in \{0,\dots,n\}$. Aussi, comme $\eta < \delta/2$, pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$ on a $2\eta < \delta \leq x_i - x_{i-1}$ donc :

$$y_{2i} - y_{2i-1} = x_i - \eta - (x_{i-1} + \eta) = x_i - x_{i-1} - 2\eta > 0.$$

Pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, on obtient $x_{i-1} < y_{2i-1} < y_{2i} < x_i$ donc :

$$[y_{2i-1}, y_{2i}] \subset]x_{i-1}, x_i[.$$

Ainsi, pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$ et tout $x \in [y_{2i-1}, y_{2i}]$ on a $f(x) \geq g(x) = p_i$ et $f(x) \leq h(x) = q_i$, de sorte que :

$$\begin{aligned}
m_{2i}^-(f,\rho) &= \inf\{f(x) \mid x \in [y_{2i-1}, y_{2i}]\} \geq \\
&\geq \inf\{g(x) \mid x \in [y_{2i-1}, y_{2i}]\} = p_i, \\
m_{2i}^+(f,\rho) &= \sup\{f(x) \mid x \in [y_{2i-1}, y_{2i}]\} \leq \\
&\leq \sup\{h(x) \mid x \in [y_{2i-1}, y_{2i}]\} = q_i.
\end{aligned}$$

On obtient une majoration de la partie paire de $D^+(f,\rho)$, c'est-à-dire :

$$\sum_{i=1}^{n} m_{2i}^+(f,\rho)(y_{2i}-y_{2i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} q_i(y_{2i}-y_{2i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} q_i(x_i-x_{i-1}) = \int_I h. \tag{11}$$

D'un autre côté, pour $i \in \{1,\dots,n-1\}$ on a $y_{2i+1}-y_{2i} = 2\eta$ tandis que $y_1-y_0=\eta$ et $y_{2n+1}-y_{2n}=\eta$. Aussi, pour tout $i \in \{1,\dots,2n+1\}$ on a :

$$m_i^+(f,\sigma) = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1},x_i]\} \leq \sup\{|f(x)| \mid x \in I\} \leq M.$$

Ainsi on peut majorer la partie impaire de $D^+(f,\rho)$ comme suit :

$$\sum_{i=1}^{n-1} m_{2i+1}^+(f,\rho)(y_{2i+1}-y_{2i}) + m_1^+(f,\rho)(y_1-y_0) + m_{2n+1}^+(f,\rho)(y_{2n+1}-y_{2i}) =$$

$$= 2\eta\sum_{i=1}^{n-1} m_{2i+1}^+(f,\rho) + \eta m_1^+(f,\rho) + \eta m_{2n+1}^+(f,\rho) \leq 2\eta\sum_{i=1}^{n-1} M + \eta M + \eta M = 2\eta n M < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Donc :

$$\sum_{i=0}^{n} m_{2i+1}^+(f,\rho)(y_{2i+1}-y_{2i}) < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{12}$$

Majorons maintenant $D^+(f,\rho)$. En utilisant (11) et (12) on obtient :

$$\begin{aligned} D^+(f,\rho) &= \sum_{i=1}^{2n+1} m_i^+(f,\rho)(y_i-y_{i-1}) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} m_{2i}^+(f,\rho)(y_{2i}-y_{2i-1}) + \sum_{i=0}^{n} m_{2i+1}^+(f,\rho)(y_{2i+1}-y_{2i}) \leq \int_I h + \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned}$$

De la même manière on obtient :

$$D^-(f,\rho) \geq \int_I g - \frac{\varepsilon}{4}.$$

On en déduit finalement :

$$D^+(f,\rho) - D^-(f,\rho) \leq \int_I h + \frac{\varepsilon}{4} - \int_I g + \frac{\varepsilon}{4} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Enfin, si f est intégrable sur I et $\tau = (y_0 < \cdots < y_m)$ est une subdivision de I alors on définit la fonction en escalier g par $g(x) = m_j^-$ si $x \in]y_{j-1},y_j[$, pour tout $j \in \{1,\dots,m\}$, où l'on choisit n'importe quelle valeur pour g sur les points y_j, pour $j \in \{0,\dots,m\}$. Alors, comme $g \leq f$ sauf sur un nombre fini de points, on a :

$$D^-(f,\tau) = \int_I g \leq \int_I f.$$

De même on obtient $\int_I f \leq D^+(f,\tau)$. □

Lemme 4.I.12. — *Si τ est une subdivision qui raffine σ, alors :*

$$D^-(f,\sigma) \le D^-(f,\tau); \qquad D^+(f,\sigma) \ge D^+(f,\tau).$$

Démonstration. — Nous écrivons la preuve uniquement pour la somme de Darboux inférieure. Soit $\sigma = (x_0 < \cdots < x_n)$ et $\tau = (y_0 < \cdots < y_m)$. Comme τ raffine σ, pour tout $i \in \{0,\ldots,n\}$ il existe un et un seul $r_i \in \{0,\ldots,m\}$ tel que $x_i = y_{r_i}$. Notons, pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$ et $j \in \{1,\ldots,m\}$:

$$I_i = [x_{i-1}, x_i], \qquad J_j = [y_{j-1}, y_j].$$

Ainsi, pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, l'intervalle I_i de σ s'écrit comme réunion d'intervalles J_j, pour $j \in \{r_{i-1}+1,\ldots,r_i\}$. En effet, τ s'écrit :

$$(a = x_0 = y_{i_0} < \cdots < y_{r_i - 1} < x_i = y_{r_i} < y_{r_i+1} < \cdots < y_{r_n} = x_n = b).$$

Autrement dit, pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, sur l'intervalle I_i on a :

$$x_{i-1} = y_{r_{i-1}} < y_{r_{i-1}+1} < \cdots < y_{r_i - 1} < y_{r_i} = x_i.$$

Pour $j \in \{r_{i-1}+1,\ldots,r_i\}$, comme $J_j \subset I_i$, on a :

$$m_i^-(f,\sigma) = \inf\{f(x) \mid x \in I_i\} \le \inf\{f(x) \mid x \in J_j\} = m_j^-(f,\tau).$$

On obtient :

$$\begin{aligned} D^-(f,\sigma) &= \sum_{i=1}^{n} m_i^-(f,\sigma)\ell(I_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=r_{i-1}+1}^{r_i} m_i^-(f,\sigma)\ell(J_j) \le \\ &\le \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=r_{i-1}+1}^{r_i} m_j^-(f,\tau)\ell(J_j) = D^-(f,\tau). \end{aligned}$$

□

4.I.D.2. Sommes de Riemann. — Une somme de Riemann d'une fonction f subordonnée à une subdivision σ d'un intervalle compact I est une sommations de valeurs de f prises à des points $z_1,\ldots,z_n$ appartenant aux n intervalles définis par σ, chacune multipliée par l'étendue de l'intervalle en question. Le résultat principal est que, si f est intégrable sur I, alors ces sommations tendent vers $\int_I f$ lorsque le pas des subdivisions devient suffisamment petit.

Définition 4.I.13. — Soit $a < b \in \mathbb{R}$, $\sigma = (x_0 < \cdots < x_n)$ une subdivision de $I = [a,b]$, $f : I \to \mathbb{R}$ une application et $\xi = (z_1,\ldots,z_n)$ avec $z_i \in [x_{i-1}, x_i]$ pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$. On appelle *somme de Riemann* de f relative à ξ la quantité $S(f,\xi)$ suivante :

$$S(f,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(z_i)(x_i - x_{i-1}).$$

On appelle parfois ξ des *points de contrôle* subordonnés à la subdivision σ.

Théorème 4.I.14. — *Soit f intégrable sur I. Alors :*

$$\lim_{\delta(\sigma)\to 0} S(f,\xi) = \int_I f.$$

L'énoncé du théorème signifie que, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta_0 > 0$ tel que, étant donnée une subdivision σ de I de pas $\delta(\sigma) < \delta_0$ et quel que soit le choix des points de contrôle ξ subordonnés à σ, on a :

$$\left|\int_I f - S(f,\xi)\right| < \varepsilon.$$

La conséquence que nous utiliserons le plus souvent sera pour les subdivisions de pas constant, i. e., constituées pour $n \in \mathbb{N}$, des points $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$, en choisissant les points de contrôle $z_i = x_i$, auquel cas on obtient :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)dt.$$

Preuve du Théorème 4.I.14. — Le schéma de la preuve est le suivant :

— On veut montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_0 > 0$ tel que toute subdivision σ de pas $\delta(\sigma) < \delta_0$ satisfait, quel que soit ξ subordonné à σ :

$$\int_I f - \varepsilon \leq S(f,\xi) \leq \int_I f + \varepsilon.$$

— Il existe d'abord τ subdivision telle que $D^+(f,\tau) - D^-(f,\tau) \leq \varepsilon/2$ donc telle que :

$$\int_I f - D^-(f,\tau) < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad D^+(f,\tau) - \int_I f < \frac{\varepsilon}{2}.$$

— On observe que $D^-(f,\sigma) \leq S(f,\xi)$ et $S(f,\xi) \leq D^+(f,\sigma)$.

— On considère la réunion ρ de σ et τ et on rappelle :

$$D^-(f,\tau) \leq D^-(f,\rho), \qquad D^+(f,\rho) \leq D^+(f,\tau).$$

— On montre (c'est l'essentiel de la preuve) que $D^-(f,\sigma) \geq D^-(f,\rho) - \frac{\varepsilon}{2}$ si $\delta(\sigma) < \delta_0$, pour un certain δ_0 bien choisi en fonction de $\|f\|_\infty$, $\ell(I)$ et τ.

— On en déduit :

$$S(f,\xi) \geq D^-(f,\sigma) \geq D^-(f,\rho) - \frac{\varepsilon}{2} \geq D^-(f,\tau) - \frac{\varepsilon}{2} \geq \int_I f - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = \int_I f - \varepsilon.$$

On a ensuite de façon similaire $S(f,\xi) \leq \int_I + \varepsilon$, ce qui termine la preuve.

Détaillons maintenant la démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est intégrable sur I, par le théorème 4.I.11 il existe une subdivision $\tau = (y_1, \ldots, y_m)$ de I telle que :

$$0 \leq D^+(f,\tau) - \int_I f < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad 0 \leq \int_I f - D^-(f,\tau) \leq \varepsilon/2. \tag{13}$$

Quitte à ajouter un point à τ, on peut supposer $m > 1$. Soit $\eta = \min\{y_i - y_{i-1} \mid i \in \{1, \ldots, m\}\}$ le minimum des longueurs des intervalles de τ. On sait que f est bornée sur I donc il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|f| \leq M$ sur I. Choisissons $\delta_0 \in]0, \eta/2[$ tel que :

$$\delta_0 < \frac{\varepsilon}{4(m-1)M}. \tag{14}$$

Notre objectif est de montrer que, si $\sigma = (x_0 < \cdots < x_n)$ est une subdivision de I de pas $\delta(\sigma) < \delta_0$ et $\xi = (z_1, \ldots, z_n)$ sont des points de contrôle subordonnés à σ, alors :

$$\int_I f - \varepsilon \leq S(f,\xi) \leq \int_I f + \varepsilon.$$

D'abord on remarque que $D^-(f,\sigma) \leq S(f,\xi) \leq D^+(f,\sigma)$. Ainsi, il suffit de montrer $\int_I f - \varepsilon \leq D^-(f,\sigma)$ et $D^+(f,\sigma) \leq \int_I f + \varepsilon$, ce qui ne dépend plus des points de contrôle ξ sinon uniquement de σ.

Nous montrons seulement la première inégalité, à savoir $D^-(f,\sigma) \geq \int_I f - \varepsilon$. Puisque (13) garantit $D^-(f,\tau) \geq \int_I f - \varepsilon/2$, il suffit de montrer $D^-(f,\sigma) \geq D^-(f,\tau) - \varepsilon/2$.

Considérons la subdivision ρ réunion de τ et σ. Pour l'écrire, remarquons que comme $\delta(\sigma) < \delta_0 < \eta/2$, pour tout $j = 1, \ldots, m$ il existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $x_k \in]y_{j-1}, y_j[$. Pour tout $j \in \{1, \ldots, m\}$, notons K_j l'intervalle fermé à gauche et ouvert à droite $K_j = [y_{j-1}, y_j[$. Ainsi, posons :

$$\begin{aligned} h_j &= \min\{k \in \{1, \ldots, n\} \mid x_k \in K_j\}, \\ k_j &= \max\{k \in \{1, \ldots, n\} \mid x_k \in K_j\}. \end{aligned}$$

Pour $j \in \{1, \ldots, m-1\}$, on a la relation fondamentale :

$$h_{j+1} = k_j + 1.$$

Ainsi, aux extrêmes de chaque intervalle K_j on a :

$$\cdots < x_{k_{j-1}} < y_{j-1} \leq x_{h_j} < \cdots < x_{k_j} < y_j \leq x_{h_{j+1}} < \cdots$$

Autrement dit, la subdivision ρ s'écrit :

$$(a = y_0 = x_{h_1} < \cdots < x_{k_1} < y_1 \leq x_{h_2} < \cdots < x_{k_j} < y_j \leq x_{h_{j+1}} < \cdots < x_{k_m} < y_m = x_n = b),$$

à ceci près que, si $y_j = x_{h_{j+1}}$ pour un certain $j \in \{1, \ldots, m-1\}$, alors on efface $x_{h_{j+1}}$. Toutefois, pour le calcul de la somme de Darboux subordonnée à la subdivision ρ, on peut également garder les points y_j et $x_{h_{j+1}}$ lorsque ceux-ci sont confondus.

Ceci constitue une subdivision qui raffine τ, donc d'après le lemme 4.I.12 on a $D^-(f,\rho) \geq D^-(f,\tau)$. On s'est ramené à montrer $D^-(f,\sigma) \geq D^-(f,\rho) - \varepsilon/2$.

Pour montrer cette dernière inégalité, on observe que la différence $D^-(f,\rho) - D^-(f,\sigma)$ est positive. Cette différence n'apparaît qu'à cause des intervalles (dont le deuxième peut être réduit à un seul point si y_j et $x_{h_{j+1}}$ sont confondus) de la forme $[x_{k_j}, y_j]$ et $[y_j, x_{h_{j+1}}]$, pour $j = 1, \ldots, m-1$. Plus précisément, si on pose, $j = 1, \ldots, m-1$:

$$\begin{aligned} \alpha_j &= \inf\{f(x) \mid x \in [x_{k_j}, y_j]\}, \\ \beta_j &= \inf\{f(x) \mid x \in [y_j, x_{h_{j+1}}]\}, \end{aligned}$$

et on note $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, alors on trouve, comme $k_j + 1 = h_{j+1}$:

$$D^-(f,\rho) - D^-(f,\sigma) = \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j(y_j - x_{k_j}) + \beta_j(x_{h_{j+1}} - y_j) - m^-_{h_{j+1}}(f,\sigma)\ell(I_{h_{j+1}}).$$

Puis, comme comme $f \leq M$ sur tout I, pour tout $j = 1,\dots,m-1$ on a $\alpha_j \leq M$, $\beta_j \leq M$. De même, pour tout $i = 1,\dots,n$ on a $-m_i^-(f,\sigma) \leq |f| \leq M$. Ainsi, comme $k_j + 1 = h_{j+1}$:

$$\begin{aligned}
D^-(f,\rho) - D^-(f,\sigma) &\leq \sum_{j=1}^{m-1} M((y_j - x_{k_j}) + (x_{h_{j+1}} - y_j)) - m_{h_{j+1}}^-(f,\sigma)(x_{h_{j+1}} - x_{k_j}) = \\
&= \sum_{j=1}^{m-1} (M - m_{h_{j+1}}^-(f,\sigma))(x_{h_{j+1}} - x_{k_j}) \leq 2M \sum_{j=1}^{m-1} (x_{h_{j+1}} - x_{k_j}) \leq \\
&\leq 2M(m-1)\delta(\sigma) \leq 2M(m-1)\delta_0 < \frac{\varepsilon}{2},
\end{aligned}$$

la dernière inégalité venant de (14). On conclut que $D^-(f,\sigma) > D^-(f,\rho) - \varepsilon/2$, ce qui achève la preuve.

□

4.II. Classes de fonctions intégrables

L'objectif ici est de montrer que certaines classes de fonctions (monotone, continues) sont bien intégrales au sens de Riemann.

4.II.A. Intégrabilité des fonctions monotones. — La classe plus immédiate de fonctions intégrables est celle des fonctions monotones sur un intervalle compact.

Théorème 4.II.1. — *Une fonction monotone sur un intervalle compact y est intégrable.*

Démonstration. — Soit $[a,b]$ l'intervalle en question et f monotone sur $[a,b]$, disons f croissante. Soit $n > 1$ un entier. On définit une subdivision de pas constant δ en posant :

$$\begin{aligned}
&\delta = \frac{b-a}{n}, \\
&x_k = a + k\delta, \qquad\qquad k = 0,\dots,n.
\end{aligned}$$

Nous définissons deux fonctions en escalier g et h en posant, pour tout $i \in \{0,\dots,n\}$ et $x \in [x_{i-1}, x_i[$:

$$g(x) = f(x_{i-1}), \qquad\qquad h(x) = f(x_i),$$

et $g(b) = f(b) = h(b)$. Par monotonie de f, on a alors $g \leq f \leq h$ sur $[a,b]$. De plus :

$$\begin{aligned}
\int_a^b h(t)dt - \int_a^b g(t)dt &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})(f(x_i) - f(x_{i-1})) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{o-1}))\delta = (f(b) - f(a))\frac{b-a}{n}.
\end{aligned}$$

Il suffit de choisir n assez grand pour que le nombre $(f(b) - f(a))\frac{b-a}{n}$ soit inférieur à ε, et on aura l'intégrabilité de f. □

4.II.B. Intégrabilité des fonctions continues, continuité uniforme. — L'autre classe majeure de fonctions intégrables au sens de Riemann est celle des fonctions continues. Pour s'en rendre compte, on passera par la notion de continuité uniforme.

4.II.B.1. Continuité uniforme. — La notion de continuité uniforme est assez naturellement inspirée par la question suivante : pour une fonction continue f sur un intervalle I, étant fixé un seuil $\varepsilon > 0$, peut-on choisir uniformément le degré δ de proximité des points x et y de I pour que $f(x)$ et $f(y)$ soient ε-proches ?

Définition 4.II.2. — Soit f une fonction de variable réelle à valeurs réels ou complexes, définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que f est *uniformément continue* sur I si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x, y \in I$, on ait :

$$|x-y| < \delta \Rightarrow \left|f(x) - f(y)\right| < \varepsilon.$$

Remarque 4.II.3. — La définition de continuité uniforme sur I diffère de celle de continuité en tout point de I uniquement par une interversion de quantificateurs. On voit immédiatement que, si f est uniformément continue sur I, alors elle est continue en tout point x de I.

4.II.B.2. Théorème de Heine. — Le théorème de Heine répond par l'affirmative à la question du départ du choix uniforme de δ par rapport aux points de l'intervalle I dès lors que I est compact.

Théorème 4.II.4. — *Soit f une fonction continue sur un intervalle compact P de $\mathbb{R}$. Alors f est uniformément continue sur P.*

Démonstration. — Soit f continue sur $P = [a, b]$. Montrons par l'absurde que f est uniformément continue sur P. Supposons donc qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\delta > 0$, on puisse trouver $x, y \in P$ tels que $|x-y| < \delta$ et $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$, et montrons que ceci conduit à un absurde.

Étant donné un tel $\varepsilon > 0$, choisissons $\delta = 1/n$ pour tout n entier positif. On en déduit l'existence de $(x_n, y_n) \in P \times P$ tels que :

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n}, \qquad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

On applique le théorème de Bolzano-Weierstrass à $(x_n) \subset P$. Il existe alors une suite extraite (x_{n_k}) convergente vers un point $x \in P$. De même, il existe une suite extraite $(y_{n_{k_j}})$ de (y_{n_k}) convergente vers un point $y \in P$. On sait aussi que $(x_{n_{k_j}})$ converge vers x en tant que suite extraite de (x_{n_k}).

Par continuité de f en x et y, on a :

$$\lim_{j\to\infty} f(x_{n_{k_j}}) = f(x), \qquad \lim_{j\to\infty} f(y_{n_{k_j}}) = f(y).$$

On voit facilement que $n_{k_j} \geq j$ donc :

$$|x_{n_{k_j}} - y_{n_{k_j}}| < \frac{1}{j}, \qquad |f(x_{n_{k_j}}) - f(y_{n_{k_j}})| \geq \varepsilon.$$

Ainsi, il est clair que :

$$\lim_{j\to\infty} |x_{n_{k_j}} - y_{n_{k_j}}| = 0,$$

i. e. $x = y$, et :

$$\lim_{j\to\infty} \left| f(x_{n_{k_j}}) - f(y_{n_{k_j}}) \right| = |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

Mais, comme $x = y$, on a $|f(x) - f(y)| = 0 \geq \varepsilon$, ce qui contredit $\varepsilon > 0$. □

4.II.B.3. Intégrabilité des fonctions uniformément continues. — On peut enfin appliquer la notion de continuité uniforme à l'intégrabilité des fonctions continues.

Théorème 4.II.5. — *Une fonction continue sur un intervalle compact est intégrable.*

Démonstration. — Fixons $\varepsilon > 0$ et soit $[a, b]$ l'intervalle en question. Bien sûr on peut supposer $b \neq a$. Choisissons un $\varepsilon' > 0$ tel que :

$$\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}.$$

On sait qu'une fonction f continue sur un intervalle compact est uniformément continue d'après le théorème de Heine. On peut alors trouver $\delta > 0$ tel que, pour tout $x, y \in [a, b]$, $|x - y| < \delta$ implique :

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon'.$$

Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, on peut trouver un entier n assez grand pour que :

$$\frac{(b-a)|f(b) - f(a)|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{et} \qquad \gamma = \frac{b-a}{n} < \delta,$$

où nous avons posé $\gamma = (b-a)/n$. Prenons une subdivision régulière de notre intervalle $[a, b]$ de pas constant γ, i. e. $\sigma = (x_0 < \cdots < x_n)$ où $x_k = a + k\gamma$.

Définissons maintenant deux fonctions en escalier g et h qui encadrent f. Aux points $x_k = a + k\gamma$ de la subdivision, on pose $g(x_k) = f(x_k) = h(x_k)$. Sur les points x des intervalles ouverts $]x_{k-1}, x_k[$ pour $k = 1, \ldots, n$ on pose :

$$g(x) = f(x_{k-1}) - \varepsilon', \qquad h(x) = f(x_k) + \varepsilon'.$$

On a alors que $f \leq h$, car $x \in [a, b]$ est soit l'un des x_k (auquel cas l'encadrement est évident) ou appartient à intervalle de la forme $]x_{k-1}, x_k[$, donc $|x - x_k| < \gamma < \delta$, ainsi :

$$f(x) \in]f(x_k) - \varepsilon', f(x_k) + \varepsilon'[\Rightarrow f(x) < h(x).$$

De même $|x - x_{k-1}| < \delta$ donc $|f(x) - f(x_{k-1})| < \varepsilon'$, en particulier $f(x) > f(x_{k-1}) - \varepsilon' = g(x)$.

Finalement, on calcule :

$$\begin{aligned}\int_a^b h(t)dt - \int_a^b g(t)dt &= \sum_{k=1}^{n} \gamma(f(x_k) - f(x_{k-1}) + 2\varepsilon') = \\ &= 2n\gamma\varepsilon' + \gamma(f(b) - f(a)) \leq \\ &= 2n\gamma\varepsilon' + \gamma|f(b) - f(a)| \leq \\ &< 2(b-a)\varepsilon' + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Ceci montre que f est intégrable. □

4.III. Propriétés fondamentales de l'intégrale de Riemann

Ici nous allons aborder quelques propriétés de base de l'intégrale de Riemann, à savoir sa linéarité, son comportement par rapport à la valeur absolue, la relation de Chasles, sa positivité.

4.III.A. Linéarité de l'intégrale. — L'intégrale est linéaire comme application sur l'espace des fonctions intégrables.

Proposition 4.III.1. — *Soit f et g fonctions intégrables (au sens de Riemann) sur un intervalle $[a,b]$, et soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda f + \mu g$ est intégrable et :*

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt.$$

Démonstration. — Soit (φ_n, ϑ_n) et (ψ_n, η_n) suites associées à f et g. Montrons que $(\lambda\varphi_n + \mu\psi_n, |\lambda|\vartheta_n + |\mu|\eta_n)$ est associée à $(\lambda f + \mu g)$. D'abord, on a :

$$|\lambda f + \mu g - (\lambda\varphi_n + \mu\psi_n)| \leq |\lambda||f - \varphi_n| + |\mu||g - \psi_n| \leq |\lambda|\vartheta_n + |\mu|\eta_n.$$

Ensuite, d'après les propriétés déjà montrées sur les fonctions en escaliers, on trouve :

$$\int_a^b (|\lambda|\vartheta_n(t) + |\mu|\eta_n(t))\,dt = |\lambda| \int_a^b \vartheta_n(t)dt + |\mu| \int_a^b \eta_n(t)dt,$$

ce qui tend vers 0 lorsque n tend vers ∞. Ainsi $\lambda f + \mu g$ est intégrable sur $[a,b]$. Pour en calculer l'intégrale, on écrit alors :

$$\begin{aligned}\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)dt &= \lim_{n\to\infty} \int_a^b (\lambda\varphi_n + \mu\psi_n)(t)dt = \\ &= \lambda \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(t)dt + \mu \lim_{n\to\infty} \int_a^b \psi_n(t)dt = \\ &= \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt.\end{aligned}$$

□

4.III.B. Croissance de l'intégrale. — La croissance de l'intégrale se manifeste dès lors qu'on prend la valeur absolue de la fonction à intégrer. Voyons comment.

Proposition 4.III.2. — *Soit $f \leq g$ intégrables sur un intervalle compact $[a,b]$. Alors :*

$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt.$$

De plus, on a $|f|$ intégrable sur $[a,b]$ et :

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt.$$

En particulier, si $|f| \leq M$ sur $[a,b]$, alors :

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq M(b-a).$$

Démonstration. — Nous avons déjà montré le premier énoncé dans la remarque 4.I.7.

On peut en fournir une deuxième preuve. Il suffit de montrer que, si $h \geq 0$ est intégrable sur $[a,b]$, alors $\int_a^b h(t)dt \geq 0$: en effet on pourra alors poser $h = g - f$ et l'énoncé suivra. Par contre, si $h \geq 0$ son intégrale est évidemment supérieure ou égale à 0, la fonction 0 étant en escalier d'intégrale nulle.

Le dernier énoncé est aussi évident une fois montré le deuxième, on s'apprête donc à démontrer celui-ci. On prend alors (φ_n, ϑ_n) une suite associée à f et on considère $(|\varphi_n|, \vartheta_n)$. On a bien sûr :

$$||f| - |\varphi_n|| \leq |f - \varphi_n| \leq \vartheta_n,$$

donc $|f|$ est intégrable sur $[a,b]$. De plus, par continuité de la norme on a :

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\int_a^b \varphi_n(t)dt\right| \leq \lim_{n\to\infty}\int_a^b |\varphi_n(t)|dt = \int_a^b |f(t)|dt,$$

l'inégalité ne faisant intervenir que φ_n étant bien sûr justifiée pour des fonctions en escalier. □

4.III.B.1. Additivité de l'intégrale sur les intervalles. — L'additivité de l'intégrale par rapport au découpage de l'intervalle d'intégration est l'outil que nous développons ici.

4.III.B.2. Relation de Chasles. — La relation de Chasles permet de découper l'intervalle d'intégration d'une fonction.

Proposition 4.III.3. — *Soit f définie sur $[a,b]$. Alors on a f est intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si, pour tout $c \in]a,b[$, elle est intégrable sur $[a,c]$ et $[c,b]$ et dans ce cas on a :*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

Démonstration. — D'abord, l'égalité souhaitée est claire pour les fonctions en escalier. En effet, si g est une telle fonction sur $[a,b]$, bien évidemment les restrictions de f à $[a,c]$ et $[c,b]$ sont en escalier. De plus, étant donnée une subdivision de g, on pourra la raffiner à $\sigma = (x_0 < \cdots < x_n)$ avec $x_k = c$ pour un certain k et avec $g(x) = m_i$ pour $x \in]x_{i-1}, x_i[$. Donc :

$$\int_a^b g(x)dx = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^k m_i(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=k+1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) =$$
$$= \int_a^c g(x)dx + \int_c^b g(x)dx.$$

Soit f intégrable sur $[a,b]$ et soit (φ_n, ϑ_n) une suite associée à f. Alors les restrictions de φ_n et ϑ_n à $[a,c]$ et $[c,b]$ donnent deux suites de fonctions en escalier $(\varphi'_n, \vartheta'_n)$ et $(\varphi''_n, \vartheta''_n)$, satisfaisant à $|f-\varphi'_n| \leq \vartheta'_n$ sur $[a,c]$ et $|f-\varphi''_n| \leq \vartheta''_n$ sur $[c,b]$. De plus

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \vartheta_n(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^c \vartheta'_n(t)dt + \lim_{n\to\infty} \int_c^b \vartheta''_n(t)dt,$$

donc les deux limites, lorsque n tend vers ∞, de $\int_a^c \vartheta'_n(t)dt$ et $\int_c^b \vartheta''_n(t)dt$ sont nulles, en étant non négatives et leur somme étant nulle.

De plus en passant à la limite dans $\int_a^c \varphi_n(x)dx + \int_c^b \varphi_n(x)dx = \int_a^b \varphi_n(x)dx$ on obtient $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$.

On montre facilement la réciproque en considérant la réunion de deux suites associées à $f|_{[a,c]}$ et$f|_{[c,b]}$ comme une suite associée à f. □

4.III.B.3. Inversion des bornes. — En pose, lorsque $a < b$:

$$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt.$$

Proposition 4.III.4. — *Si $a,b,c \in \mathbb{R}$, et f est intégrable sur* $[\min(a,b,c), \max(a,b,c)]$, *alors on a :*

$$\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt.$$

4.III.B.4. Fonction d'intégrale nulle. — Le résultat suivant est très utile afin de considérer l'intégrale comme une norme sur l'ensemble des fonctions continues.

Proposition 4.III.5. — *Pour qu'un fonction f continue et positive sur un intervalle compact ait intégrale nulle, il faut et il suffit que f soit nulle.*

Démonstration. — Évidemment si $f = 0$, l'intégrale de f vaut 0. En revanche, soit $[a,b]$ notre intervalle , si $f \neq 0$, disons $f(x_0) > 0$ pour un certain $x_0 \in [a,b]$ alors par continuité il existe un intervalle $[c,d]$, avec $c < d$, de sorte que $[c,d]$ soit contenu dans $[a,b]$ et contienne x_0, tel que $f(x) \geq N$, N étant un réel positif, et ce quel que soit $x \in [c,d]$. Ainsi :

$$\int_a^b f(t)dt \geq \int_c^d f(t)dt \geq \int_c^d N dt = N(d-c) > 0,$$

ce qui est absurde. □

4.III.C. Produit de fonctions intégrables, Cauchy-Schwarz. — L'inégalité de Cauchy-Schwarz est une inégalité fondamentale pour les intégrales de produits de fonction intégrables.

4.III.C.1. Produit de fonctions intégrables. — La première chose à établir c'est un résultat d'intégrabilité d'une fonction définie comme produit de deux fonctions intégrables.

Théorème 4.III.6. — *Soit $a < b \in \mathbb{R}$ et f et g intégrables sur $[a,b]$. Alors fg l'est aussi.*

Démonstration. — Soit (φ_n, ϑ_n) suite associée à f et (ψ_n, η_n) suite associée à g. On sait que f est bornée sur $[a,b]$, disons par une constante M, et que g aussi est bornée disons par N. On peut supposer $\vartheta_n \leq M$ et $\eta_n \leq N$ pour tout entier n.

En effet, fixons $n \in \mathbb{N}$. Nous avons alors une subdivision $\sigma = (x_0, \ldots, x_k)$ de $I = [a,b]$ pour laquelle ϑ_n et φ_n sont en escalier, donc il existe $m_1, \ldots, m_k$ et $p_1, \ldots, p_k$ réels tels que $\vartheta_n(x) = m_i$ et $\varphi_n(x) = p_i$ pour $x \in]x_{i-1}, x_i[$. Ainsi pour $i = 1, \ldots, k$ on pose, pour $x \in]x_{i-1}, x_i[$:

$$\tilde{\vartheta}_n(x) = \begin{cases} M, & \text{si } m_i > M, \\ m_i, & \text{si } m_i \leq M. \end{cases} \qquad \tilde{\varphi}_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } m_i > M, \\ p_i, & \text{si } m_i \leq M. \end{cases}$$

On pose aussi $\tilde{\vartheta}_n(x_i) = M$ et $\tilde{\varphi}_n(x_i) = 0$ pour tout $i = 0, \ldots, k$. Nous avons donc $\tilde{\vartheta}_n$ et $\tilde{\varphi}_n$ définies sur I. Il est clair que les nouvelles fonctions $\tilde{\vartheta}_n$ et $\tilde{\varphi}_n$ sont encore en escalier pour la subdivision σ.

On définit de la sorte une nouvelle paire de suites de fonctions en escalier $(\tilde{\vartheta}_n, \tilde{\varphi}_n)$. Or la suite ainsi obtenue continue d'être associée à f. Pour le voir, d'abord on remarque que $|f - \tilde{\varphi}_n| \leq \tilde{\vartheta}_n$ continue d'être valide sur I. En effet, d'abord cette égalité est évidente si $x = x_i$ pour $i = 0, \ldots, n$. Ensuite, si $x \in]x_{i-1}, x_i[$ pour un certain $i = 1, \ldots, n$, alors nous avons deux cas : soit $m_i \leq M$, auquel cas a $\tilde{\vartheta}_n(x) = \vartheta_n(x)$ et $\tilde{\varphi}_n(x) = \varphi_n(x)$ donc $|f(x) - \tilde{\varphi}_n(x)| \leq \tilde{\vartheta}_n(x)$ équivaut à $|f(x) - \varphi_n(x)| \leq \vartheta_n(x)$, ce qui est valide car (φ_n, ϑ_n) est une suite associée à f. Sinon, si $m_i > M$ alors $\tilde{\vartheta}_n(x) = M$ et $\tilde{\varphi}_n(x) = 0$ donc $|f(x) - \tilde{\varphi}_n(x)| \leq \tilde{\vartheta}_n(x)$ équivaut à $|f(x)| \leq M$, ce qui est valide par définition de M.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|\vartheta_n| \leq M$ et, de plus, $\tilde{\vartheta}_n$ est positive et majorée par ϑ_n sur $I \setminus \sigma$ par définition. On sait que (ϑ_n) tend vers 0 en intégrale. Ainsi :

$$0 \leq \int_I \tilde{\vartheta}_n \leq \int_I \vartheta_n, \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ donc :} \qquad \lim_{n\to\infty} \int_I \tilde{\vartheta}_n = 0.$$

Supposons désormais $\vartheta_n \leq M$ et $\eta_n \leq N$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $|\psi_n| - |f| \leq \eta_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|\psi_n| \leq 2N$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Avec cette hypothèse sur les suites associées, on peut construire une suite associée à fg, à savoir $(\varphi_n \psi_n, 2N\vartheta_n + M\eta_n)$. On a en effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} |fg - \varphi_n \psi_n| &= |fg - f\psi_n + f\psi_n - \varphi_n \psi_n| \leq \\ &\leq |fg - f\psi_n| + |f\psi_n - \varphi_n \psi_n| = \\ &\leq |f||g - \psi_n| + |\psi_n||f - \varphi_n| \leq M\eta_n + 2N\vartheta_n. \end{aligned}$$

Par linéarité de l'intégrale et de la limite, on a donc :

$$\lim_{n\to\infty}\int_I (M\eta_n + 2N\vartheta_n) = \lim_{n\to\infty}\left(M\int_I \eta_n + 2N\int_I \vartheta_n\right) =$$
$$= M\lim_{n\to\infty}\int_I \eta_n + 2N\lim_{n\to\infty}\int_I \vartheta_n = 0.$$

On a montré que fg est intégrable. □

4.III.C.2. Inégalité de Cauchy-Schwarz. — Soit $I = [a,b]$ un intervalle compact. On considère l'application Φ, définie sur l'espace E des fonctions intégrables au sens de Riemann sur $[a,b]$:

$$\Phi(f,g) = \int_a^b f(t)g(t)dt.$$

Cette fonction, une fois fixée g, est linéaire en f. De même en fixant g, la fonction $\Phi(g,f)$ de f est linéaire. De plus, on a bien sûr $\Phi(f,f) \geq 0$.

Théorème 4.III.7. — *Soit f,g intégrables sur $[a,b]$. Alors :*

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 \leq \int_a^b f^2(t)dt\int_a^b g^2(t)dt.$$

Démonstration. — Soit E l'espace vectoriel des fonctions intégrables sur $[a,b]$, donc $f,g\in E$ et $fg\in E$. On a, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$:

$$0 \leq \Phi(\lambda f+g,\lambda f+g) = \lambda^2\Phi(f,f) + 2\lambda\Phi(f,g) + \Phi(g,g).$$

Supposons d'abord $\Phi(f,f) = 0$. Alors, pour que l'expression ci-dessus soit positive pour tout λ, il faut que $\Phi(f,g) = 0$, autrement l'expression changerait de signe en :

$$\lambda = -\frac{\Phi(g,g)}{2\Phi(f,g)}.$$

On trouve alors que $\int_a^b f^2(t)dt = 0$ implique $\int_a^b f(t)g(t)dt = 0$, donc Cauchy-Schwarz est vérifiée dans ce cas.

Supposons alors $\Phi(f,f) \neq 0$, c'est-à-dire $\Phi(f,f) > 0$. En raisonnant sur le discriminant du polynôme de degré 2 en λ, on voit que la condition de positivité écrite entraîne :

$$\Phi(f,g)^2 \leq \Phi(f,f)\Phi(g,g).$$

On écrit alors :

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 = \Phi(f,g)^2 \leq \Phi(f,f)\Phi(g,g) = \int_a^b f^2(t)dt\int_a^b g^2(t)dt.$$

□

4.III.C.3. Inégalité de Minkowski. — L'inégalité de Minkowski, ou inégalité triangulaire, permet de montrer que l'intégrale carrée définit une norme, appelée la norme 2, sur l'ensemble des fonctions continues sur un intervalle $I = [a, b]$, $a < b \in \mathbb{R}$. Posons, pour f intégrable sur I,

$$\|f\|_2 = \left(\int_I f^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Proposition 4.III.8. — *Soit f, g intégrables sur $I = [a, b]$. Alors :*

$$\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2.$$

Ainsi, $\|\cdot\|_2$ est une norme sur l'ensemble des fonctions continues sur I.

Démonstration. — On sait que fg, f^2, g^2 et $f + g$ sont intégrables sur $I = [a, b]$. On écrit :

$$\|f + g\|_2^2 = \int_I (f + g)^2 = \int_I f^2 + \int_I g^2 + 2\int_I fg,$$

$$(\|f\|_2 + \|g\|_2)^2 = \int_I f^2 + \int_I g^2 + 2\left(\int_I f^2 \int_I g^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Donc l'inégalité en question est valide si :

$$\int_I fg \leq \left(\int_I f^2 \int_I g^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Or ceci est stipulé par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

On peut montrer maintenant que $f \mapsto \|f\|_2$ est une norme sur l'ensemble des fonctions continues sur I. En effet, si f est une telle fonction, alors f^2 est continue et positive, donc $\inf\{f(x)^2 \mid x \in I\} \geq 0$. Ainsi $f = 0$ ssi $\inf\{f(x)^2 \mid x \in I\} = 0$ et par ailleurs, par continuité de f^2, on a $\inf\{f(x)^2 \mid x \in I\} = 0$ ssi $\|f\|_2 = \int_I f^2 = 0$ grâce à la proposition 4.III.5.

De plus, l'inégalité de Minkowski montre que $\|\cdot\|_2$ est subadditive. Enfin, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $\|\lambda f\|_2 = |\lambda| \|f\|_2$.

En conclusion, $\|\cdot\|_2$ est une norme sur l'ensemble des fonctions continues sur I. □

4.IV. Intégrale indéfinie

L'intégrale indéfinie d'une fonction f revient à étudier la fonction de répartition de f, donc l'aire de de courbe sous-jacente à f vue comme fonction de la borne supérieure x de l'intégration.

4.IV.A. Théorème fondamental pour l'intégrale indéfinie. — Le théorème fondamental du calcul intégrale stipule que la fonction de répartition de f est une primitive de f, i.e. que sa fonction dérivée est f.

Définition 4.IV.1. — Soit f intégrable sur $[a,b]$ et $x \in [a,b]$. On définit alors la fonction intégrale indéfinie :

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

On appelle aussi F la *primitive basée en a* de f.

Théorème 4.IV.2. — *Soit f intégrable sur $[a,b]$, F sa primitive basée en a et $x_0 \in [a,b]$.*

i) Si $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell_+$, alors F est dérivable à droite en x_0 et sa dérivée à droite est ℓ^+.

ii) Si $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell_-$, F est dérivable à gauche en x_0 et sa dérivée à gauche vaut ℓ^-.

iii) Si f en continue en x_0, alors F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$.

Démonstration. — Supposons que ℓ^+ existe. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Il existe alors $\delta > 0$ tel que, si $x_0 < t < x_0 + \delta$, alors $|f(t) - \ell_+| < \varepsilon$. Choisissons $x \in]x_0, x_0 + \delta[$. Pour chacun des nombres $t \in]x_0, x]$ on retrouve $|f(t) - \ell_+| < \varepsilon$, donc :

$$\int_{x_0}^x |f(t) - \ell_+| dt \le \varepsilon(x - x_0).$$

On écrit alors :

$$\begin{aligned} |F(x) - F(x_0) - (x - x_0)\ell_+| &= \left| \int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt - (x - x_0)\ell_+ \right| = \\ &= \left| \int_{x_0}^x f(t)dt - (x - x_0)\ell_+ \right| \le \\ &= \left| \int_{x_0}^x (f(t) - \ell_+)dt \right| \le \\ &\le \int_{x_0}^x |f(t) - \ell_+| dt \le \varepsilon(x - x_0). \end{aligned}$$

pour tout $x \in]x_0, x_0 + \delta[$. Ceci s'écrit aussi, pour les mêmes x :

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - \ell_+ \right| \le \varepsilon.$$

Cette inégalité montre bien que la dérivée à droite de F en x_0 vaut ℓ_+. L'énoncé sur la dérivée à gauche se démontre de la même manière. Celui qui concerne la dérivabilité tout court est une conséquence des autres deux. □

Définition 4.IV.3. — Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle *primitive* de f une quelconque fonction F, dérivable sur I, telle que, pour tout $x \in I$:

$$f(x) = F'(x).$$

Proposition 4.IV.4. — *Soit f continue sur un intervalle $[a,b]$. Alors, si F est une primitive de f sur $[a,b]$, on a la relation :*

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Démonstration. — Considérons la fonctions G définie par :

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

On sait que, puisque f est continue, G est une primitive de f, donc $G'(x) = f(x)$ quel que soit $x \in [a,b]$. De plus $G(a) = 0$. Alors $(F-G)' = 0$ sur $[a,b]$, $F-G$ est constante, car on sait qu'une fonction dérivable sur $[a,b]$ de dérivée nulle est constante, par le théorème des accroissements finis. Ainsi $F = G + F(a)$. Il s'en suit que $F(b) - F(a) = G(b) - G(a) = G(b) = \int_a^b f(t)dt$. □

4.IV.B. Intégration par parties. — L'intégration par parties est l'une des techniques de calcul les plus utilisées pour les intégrales de fonctions produit.

Proposition 4.IV.5. — *Soit f et g dérivables, à fonctions dérivées continues sur $P = [a,b]$. Alors on a :*

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = fg\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Démonstration. — Bien entendu, $f'g$ et gf' sont continues donc intégrables sur $[a,b]$. Donc $(fg)' = f'g + fg'$ entraîne :

$$fg\Big|_a^b = \int_a^b (fg)'(x)dx = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx,$$

ce qui équivaut au résultat. □

Évidemment on peut remplacer l'hypothèse f,g dérivables à fonctions dérivées continues par fg, $f'g$, fg' définies et intégrables sur $[a,b]$.

4.IV.C. Changement de variable. — Ici nous abordons l'invariance de l'intégrale sous changement de variable défini par une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Théorème 4.IV.6. — *Soit φ une application dérivable sur un intervalle compact $I = [a,b]$. Supposons que φ' soit continue sur I. Soit f une fonction continue sur $\varphi(I)$. Alors $f \circ \varphi$ est intégrable sur I et :*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt = \int_a^b f(\varphi(s))\varphi'(s)ds.$$

Commençons par deux propositions. La première est le théorème des valeurs intermédiaires, dont on donne ici la preuve. La deuxième stipule que l'image continue d'un intervalle compact est un intervalle compact.

***Proposition 4.IV.7* (Valeurs intermédiaires).** — *. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et $c \in \mathbb{R}$ une valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) = c$.*

Démonstration. — Si $f(a) = f(b)$, l'énoncé est évident, on suppose donc $f(a) \neq f(b)$. Supposons $f(a) < f(b)$, la preuve si $f(a) > f(b)$ étant similaire. Soit donc $f(a) < c < f(b)$. On pose $g = f - c$ donc $g(a) = a - c < 0$ et $g(b) = f(b) - c > 0$.

La fonction g est continue et on cherche donc $x \in [a,b]$ tel que $g(x) = 0$. Posons :

$$X = \{x \in [a,b] \mid g(x) < 0\}.$$

La partie X de $\mathbb{R}$ n'est pas vide car $a \in X$. Aussi X est majorée par b du fait que $X \subset [a,b]$. Ainsi on peut poser :

$$x_0 = \sup(X).$$

On a $x_0 \leq b$ car b majore X. Aussi, $a \leq x_0$ car $a \in X$. En fait $x_0 > a$ car autrement on aurait $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in]a,b]$, donc aussi $g(a) \geq 0$ par continuité de g. Donc :

$$x_0 \in]a,b].$$

Montrons que $g(x_0) = 0$. Supposons par l'absurde $g(x_0) > 0$ et notons $y_0 = g(x_0)$. Considérons $\varepsilon = y_0/2 > 0$. Par continuité de g, il existe donc $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap [a,b]$ on ait :

$$\frac{y_0}{2} = y_0 - \varepsilon < g(x) < y_0 + \varepsilon = \frac{3y_0}{2}.$$

Quitte à remplacer δ par $\delta_0 = \min(\delta, x_0 - a) > 0$, on a $]x_0 - \delta_0, x_0] \subset [a, x_0]$ donc $g(x) > 0$ pour tout $x \in]x_0 - \delta_0, x_0]$. Or, comme $x_0 = \sup(X)$, on peut trouver $x \in X$ tel que $x > x_0 - \delta_0$. Donc ce x satisfait $g(x) < 0$ car $x \in X$ et $g(x) > 0$ car $x \in]x_0 - \delta_0, x_0]$. C'est une contradiction, qui montre $g(x_0) \leq 0$.

Ce qu'on vient de montrer prouve $x_0 \neq b$ (i.e. $x_0 < b$) car $g(x_0) \leq 0$ et $g(b) > 0$, ainsi :

$$x_0 \in]a,b[.$$

Montrons maintenant $g(x_0) \geq 0$. Supposons par l'absurde $g(x_0) < 0$. Notons $z_0 = -g(x_0)$ et $\varepsilon = z_0/2$. De nouveau par continuité de g il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap [a,b]$ on ait :

$$-\frac{3z_0}{2} = z_0 - \varepsilon < g(x) < z_0 + \varepsilon = -\frac{z_0}{2},$$

Quitte à remplacer δ par $\delta_0 = \min(\delta_0, b - x_0) > 0$, on a $[x_0, x_0 + \delta_0[\subset [x_0, b[$ donc $g(x) < 0$ pour tout $x \in [x_0, x_0 + \delta_0[$. Ainsi, pour $x \in]x_0, x_0 + \delta_0[$ on a $x > x_0$ et $x \in X$, donc x_0 n'est pas un majorant de X, contradiction.

On en déduit de cette dernière contradiction que $g(x_0) \geq 0$. Conclusion, $g(x_0) = 0$. □

Proposition 4.IV.8. — *Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur un intervalle compact I. Alors $\varphi(I)$ est un intervalle compact de $\mathbb{R}$.*

Démonstration. — Montrons d'abord que φ est bornée. Si ce n'était pas le cas, on aurait pour tout $n \in \mathbb{N}$ un élément $x_n \in [a,b]$ tel que $|\varphi(x_n)| \geq n$. D'après Bolzano-Weierstrass on pourrait extraire de (x_n) une suite (x_{n_k}) convergente, donc bornée. Mais $|x_n| \geq n$ implique $|x_{n_k}| \geq n_k$, donc (x_{n_k}) ne peut être bornée : contradiction.

Soit alors M la borne supérieure des valeurs atteintes par φ, i. e. :

$$M = \sup\{\varphi(x) \mid x \in I\}.$$

On a $M \in \mathbb{R}$. Pour tout n entier positif, il existe x_n tel que $\varphi(x_n) > M - \frac{1}{n}$. Soit x le point limite d'une suite extraite convergente (x_{n_k}) de (x_n). Par continuité de φ :

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(x_{n_k}) = \varphi(x).$$

Il est alors clair que $\varphi(x) = M$. En effet, :

$$0 \leq \left|\varphi(x_{n_k}) - M\right| = M - \varphi(x_{n_k}) < \frac{1}{n_k},$$

donc :

$$0 \leq \lim_{k\to\infty} \left|\varphi(x_{n_k}) - M\right| = \lim_{k\to\infty} (M - \varphi(x_{n_k})) = M - \varphi(x) \leq \lim_{k\to\infty} \frac{1}{n_k} = 0.$$

On a montré que φ est bornée et atteint ses bornes, donc toute valeur intermédiaire est aussi atteinte d'après le théorème, justement, des valeurs intermédiaires. □

Démonstration du théorème. — Le lemme montre qu'il existe des réels $c \leq d$ tels que $\varphi([a,b]) = [c,d]$. On a f intégrable sur $[c,d]$ et, pour tout $x \in [a,b]$, la valeur $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(x)} f(t)dt$ est définie. On pose alors, pour $x \in [a,b]$ et $y \in [c,d]$:

$$F(x) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(x)} f(t)dt, \qquad H(y) = \int_{\varphi(a)}^{y} f(t)dt.$$

Il est clair alors que F et H sont des fonctions continues, F définie sur I, et H sur $\varphi(I)$, et $F = H \circ \varphi$. On définit aussi la fonction G, continue sur I :

$$G(x) = \int_a^x f(\varphi(s))\varphi'(s)ds.$$

On a :

$$H'(y) = f(y), \qquad G'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

Donc :

$$F'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x) = G'(x).$$

On conclut, puisque $F(a) = G(a)$, que $F = G$. □

4.V. Intégrale généralisée

Pour l'intégrale généralisée, nous traitons seulement le cas des intervalles infinis et des fonctions de signe constant.

Définition 4.V.1. — Soit $a \in \mathbb{R}$ et f intégrable sur tout intervalle de la forme $[a,b]$, pour n'importe quel $b \geq a$ réel. Alors nous posons :

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{y\to\infty} \int_a^y f(t)dt.$$

Remarque 4.V.2. — Si $f \geq 0$, alors $F(y) = \int_a^y f(t)dt$ est croissante et $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ existe dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $F(y)$ est majorée. Ceci est équivalent aussi à ce que $(F(n))$ soit majorée.

Démonstration. — Soit $y_1 \geq y_2 \geq a$. Alors :

$$F(y_2) = \int_a^{y_2} f(t)dt = \int_a^{y_1} f(t)dt + \int_{y_1}^{y_2} f(t)dt \geq F(y_1),$$

donc F est croissante. Elle a donc une limite pour y qui tend vers l'infini si et seulement si elle majorée.

Bien sûr pour écrire $F(n)$ nous supposons $n \geq a$, ce qui arrive pour n suffisamment grand. Puis si $F(y)$ est majorée bien sûr $(F(n))$ est majorée. Par contre, si $(F(n))$ est majorée, alors il existe un majorant d tel que $F(n) \leq d$ pour tout n. Donc pour $y \geq a$, on a bien un $n \in \mathbb{N}$ tel que $y \leq n$ donc $F(y) \leq F(n) \leq d$. □

4.V.A. Comparaison entre séries et intégrales. — Le résultat suivant permet d'établir la convergence d'une série positive dont le terme général est défini par une fonction f à partir de l'intégrale généralisée de f, et réciproquement.

Théorème 4.V.3. — *Soit (u_n) une suite numérique. Supposons que, pour $n \geq N$, on ait $u_n = f(n)$, avec f fonction positive décroissante de variable réelle, définie sur la demi-droite $[N, +\infty[$. Alors $\sum u_n$ est de même nature que $\int_N^{+\infty} f(t)dt$.*

Démonstration. — On peut supposer que $u_n = f(n)$ soit vrai à partir du premier rang, c'est-à-dire pour $N = 0$. Comme f est décroissante, on a pour tout n et tout $t \in [n, n+1]$:

$$f(n) \geq f(t) \geq f(n+1).$$

On peut alors écrire :

$$u_{n+1} = f(n+1) = f(n+1)\int_n^{n+1} dt \leq \int_n^{n+1} f(t)dt \leq \int_n^{n+1} f(t)dt = f(n) = u_n.$$

Par la règle de Chasles, on a alors :

$$s_{m+1} - u_0 = \sum_{n=0}^{m} u_{n+1} \leq \int_0^{m+1} f(t)dt \leq \sum_{n=0}^{m} u_n = s_m,$$

la suite (s_m) étant celle des sommes partielles de $\sum u_n$.

Maintenant, l'intégrale $\int_0^{m+1} f(t)dt$ est convergente si et seulement si $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est majorée, ce qui arrive si et seulement si la suite (v_m) définie par $v_m = \int_0^{m+1} f(t)dt$ est majorée. D'après l'encadrement $s_{m+1} - u_0 \leq v_m \leq s_m$, on voit que (v_m) est majorée si et seulement si (s_m) l'est, c'est à dire que $\sum u_n$ et $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ ont même nature. □

Corollaire 4.V.4. — *Si $u_n = f(n)$ est valide pour tout n et $\sum u_n$ converge, alors on a :*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \leq \int_0^{+\infty} f(t)dt \leq \sum_{n=0}^{\infty} u_n.$$

La série de Bertrand est un raffinement de la série de Riemann. Étant donnés deux deux réels α et β, on pose :

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}.$$

On parle alors de la série de Bertrand associée à (α,β).

Théorème 4.V.5. — *La série de Bertrand associée à (α,β) converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou alors $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.*

Démonstration. — Soit $\alpha > 1$. Posons $\gamma = \frac{\alpha-1}{2}$. On a facilement :

$$\begin{aligned} &\gamma + 1 > 1, \\ &\gamma + 1 - \alpha = -\gamma < 0. \end{aligned}$$

Ainsi, on trouve :

$$\frac{u_n}{n^{-\gamma-1}} = \frac{n^{\gamma+1}}{n^\alpha \ln(n)^\beta} = \frac{n^{-\gamma}}{\ln(n)^\beta},$$

ce qui tend clairement vers 0 lorsque n tend vers ∞. De plus, $\sum n^{-\gamma-1}$ converge d'après le théorème 2.II.8. Ainsi la convergence de la série de Bertrand pour $\alpha > 1$ est assurée par la remarque 2.II.5.

Si $\alpha < 1$, alors :

$$\frac{\frac{1}{n}}{u_n} = n^{\alpha-1} \ln(n)^\beta,$$

ce qui tend vers 0 lorsque n tend vers ∞. Donc, comme $\sum 1/n$ diverge, la série de Bertrand diverge aussi.

Soit enfin $\alpha = 1$. Si $\beta \leq 0$, alors :

$$u_n \geq \frac{1}{n},$$

ainsi la série de Bertrand diverge en vertu de la divergence de la série harmonique, cf. Exemple 2.I.12 et de la proposition 2.II.2.

Si par contre $\alpha = 1$ et $\beta > 0$ on considère la fonction f de variable réelle, définie, positive et décroissante sur $[2,+\infty[$:

$$f(x) = \frac{1}{x \ln(x)^\beta}.$$

Alors, d'après le théorème 4.V.3, $\sum u_n$ est de même nature que :

$$\int_2^\infty \frac{1}{t \ln(t)^\beta} dt.$$

On calcule alors, par changement de variable $t = e^s$:

$$\int_2^x \frac{1}{t \ln(t)^\beta} dt = \int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{1}{s^\beta} ds.$$

Or si $\beta \neq 1$, cette intégrale se calcule de la façon suivante :

$$\int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{1}{s^\beta} ds = \left. \frac{s^{1-\beta}}{1-\beta} \right|_{s=\ln 2}^{s=\ln x}.$$

On voit alors que cette intégrale est définie si et seulement si $\beta > 1$. Par contre, si $\beta = 1$, on calcule :

$$\int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{1}{s} ds = \ln(s)\Big|_{s=\ln 2}^{s=\ln x} = \ln(\ln(x)) - \ln(\ln(2)),$$

ce qui diverge lorsque x tend vers l'infini. □

4.VI. Passage à la limite sous signe d'intégrale

Théorème 4.VI.1. — *Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables sur $I = [a,b]$, uniformément convergente vers f sur I. Alors f est intégrable sur I et :*

$$\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n.$$

Démonstration. — Soit $\varepsilon > 0$. On peut supposer $a < b$. Choisissons $\varepsilon' > 0$ avec :

$$\varepsilon' < \frac{b-a}{4}.$$

Il existe n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, on ait :

$$\sup_{x\in I} |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon'.$$

Maintenant, soit $n \geq n_0$ et utilisons que f_n est intégrable. Il existe alors $g \in \mathcal{E}_-(f_n)$ et $h \in \mathcal{E}_+(f_n)$ telles que $\int_I h - \int_I g < \varepsilon/2$.

Comme $\sup_{x\in I} |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon'$, sur I nous pouvons écrire :

$$g - \varepsilon' \leq f_n - \varepsilon' < f < f_n + \varepsilon' \leq h + \varepsilon'.$$

Ainsi $g - \varepsilon' \in \mathcal{E}_-(f)$ et $h + \varepsilon' \in \mathcal{E}_+(f)$. Finalement :

$$\int_I (h + \varepsilon') - \int_I (g - \varepsilon') = \int_I 2\varepsilon' + \int_I h - \int_I g < 2\varepsilon'(b-a) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Ceci montre que f est intégrable sur I.

De plus, des inégalités $f_n - \varepsilon' \leq f \leq f_n + \varepsilon'$ on obtient, pour tout $n \geq n_0$:

$$\int_I f_n - \varepsilon'(b-a) \leq \int_I f \leq \int_I f_n + \varepsilon'(b-a),$$

donc :

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n - \varepsilon'(b-a) \leq \int_I f \leq \lim_{n\to\infty} \int_I f_n + \varepsilon'(b-a).$$

Ceci étant valide pour n'importe quel $\varepsilon' > 0$, on obtient $\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n$. □

BIBLIOGRAPHIE

[CE05] François Cottet-Emard, *Analyse*, LMD Maths, De Boeck, Paris, 2005.

[Esc20] Jean-Pierre Escofier, *Toute l'analyse de la licence : cours, exercices corrigés*, second ed., Sciences Sup, Dunod, Dunod, Paris, 2020.

[GD09] Sylvie Guerre-Delabriere, *Suites, séries, intégrales : Cours et exerices corrigés niveau l2*, Mathématiques à l'université, Ellipses, Paris, 2009.

[Gou20] Xavier Gourdon, *Analyse*, third ed., Les maths en tête, Ellipses, Paris, 2020.

[LFA77] Jacqueline Lelong-Ferrand and Jean-Marie Arnaudiès, *Cours de mathématique, tome 2, analyse*, Dunod, Paris, 1977.