INTÉGRALE DE RIEMANN

Exercice 1. — a) Montrer que pour tout $k>0$, on a :

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$$

et que pour tout $k>1$, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$$

est convergente et que sa limite appartient à l'intervalle $[-2,-1]$.

Exercice 2. — Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Calculer $F'(x)$ dans les cas suivants :

$$F(x) = \int_{2x-1}^{x^2+1} f(t)dt \quad \text{puis} \quad F(x) = \int_0^x (x^2 - f(t))^2 dt.$$

Exercice 3. — À l'aide des sommes de Riemann d'une fonction convenable, calculer la limite des suites dont le terme général est donné ci-dessous :

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{n}, \quad b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n\alpha + k}\ (\alpha > 0), \quad c_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{1/n}.$$

Exercice 4. — Soit $\alpha > 0$. Trouver un équivalent simple de $u_n = \sum_{k=1}^{n} k^{\alpha}$.

Exercice 5. — Soit f une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que :

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(x)}\right) \geq (b-a)^2,$$

et que l'égalité a lieu si et seulement si f est constante.

Exercice 6. — Soit f une fonction continue et positive sur $[0,1]$. Démontrer l'inégalité :

$$\left(\int_0^1 \sqrt{f(x)}dx\right)^2 \leq \int_0^1 f(x)dx.$$

Quand a-t-on égalité?

Exercice 7. — Calculer les intégrales suivantes en utilisant un changement de variable convenable :

$$\text{a)} \int_0^1 \frac{e^x}{e^{-x}+1}dx \qquad \text{b)} \int_0^{\pi/4} \frac{\cos x(1+\tan^2 x)}{\sin x + \cos x}dx$$

$$\text{c)} \int_0^{\pi} \sin^5 x \cos^2 x\,dx \qquad \text{d)} \int_0^{\pi} \frac{\cos^{21} x}{1+\sin^{13} x}dx$$

Exercice 8. — Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx$ (intégrale de Wallis). Pour $n \geq 2$, établir, à l'aide d'une intégration par parties, une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2}. En déduire l'expression de I_n en fonction de n.

Exercice 9. — Soit f une fonction de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. En intégrant par parties la dernière intégrale, établir la relation :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) + \frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)\,dx.$$

En déduire que lorsque l'on remplace, sur un intervalle $[a, b]$ une fonction f par la fonction affine g vérifiant $f(a) = g(a)$ et $f(b) = g(b)$, l'erreur commise sur l'intégrale est majorée par :

$$\frac{1}{12} \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|(b-a)^3.$$

Exercice 10. — Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. On dit que f est lipschitzienne s'il existe un réel positif k tel que :

$$\forall x \in I,\ \forall y \in I, \quad |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

a) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ lipschitzienne. Montrer que f est uniformément continue sur I.
b) Soit f une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$. Montrer que f est lipschitzienne (on pourra utiliser l'inégalité de la moyenne).
c) Montrer que les fonctions sinus et cosinus sont lipschitziennes sur $\mathbb{R}$.