# SÉRIES ENTIÈRES

***Exercice 1.*** — Déterminer le disque de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ dans les cas suivants

$$\text{(i) } a_n = 2^n(n+1) \quad \text{(ii) } a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \quad \text{(iii) } a_n = n\sqrt{n}$$

$$\text{(iv) } a_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{(v) } a_n = \frac{i^n}{n} \quad \text{(vi) } a_n = \ln n$$

$$\text{(vii) } a_n = n(n-1)\cdots(n-p), \text{ pour } n \geq p \text{ et } p \in \mathbb{N}^* \text{ fixé}$$

$$\text{(viii) } a_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha},\ \alpha > 0 \quad \text{(ix) } a_n = \exp(i\alpha n),\ \alpha > 0.$$

***Exercice 2.*** — Pour chacune des séries entières $S$ suivantes de coefficients $a_n$, déterminer le rayon de convergence $R$, l'ensemble $\mathscr{A}$ des nombres réels pour lesquels la série converge absolument et l'ensemble $\mathscr{C}$ des nombres réels pour lesquels la série converge.

$$\text{(a) } \sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{1}{n}\, x^n \quad \text{(b) } \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{\ln n} \quad \text{(c) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln n!} \quad \text{(d) } \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{E}(\sqrt{2^n+1})x^n$$

$$\text{(e) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{\cosh n} \quad \text{(f) } \sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n \quad \text{(g) } \sum_{n=0}^{\infty} n! x^{n^2} \quad \text{(h) } \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sin\frac{n\pi}{3}\right)^n x^n$$

***Exercice 3.*** — Soit $(a_n)$ une suite complexe convergeant vers $l \in \mathbb{C}$. Soit $R$ le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

i) On suppose $l \neq 0$. Montrer que $R = 1$.

ii) On suppose $l = 0$. Montrer que $R \geq 1$. Peut-on dire mieux?

***Exercice 4.*** — Soit $\alpha$ et $\beta$ deux nombres réels tels que $\alpha$ ne soit pas de la forme $k\pi$ avec $k$ entier. Trouver le rayon de convergence $R$, calculer la somme pour tout nombre complexe $z$ tel que $|z| < R$, et étudier ce qui se passe si $|z| = R$ pour la série entière:

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\alpha + \beta) z^n.$$

[Indication: en utilisant les formules trigonométriques, montrer que $\cos(n\alpha + \beta)$ ne tend pas vers 0 quand $n \to \infty$].

***Exercice 5***. — Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R$. Soit

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad n \in \mathbb{N}$$

et soit $R'$ le rayon de convergence de $\sum S_n z^n$.

i) En considérant la série produit de $\sum a_n z^n$ et de $\sum z^n$, montrer l'inégalité

$$\min(1, R) \leq R' \leq R\ .$$

ii) Etudier les exemples suivants

$$a_n = \frac{1}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}$$

et

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{n!} \quad \text{et} \quad a_{2n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \ n \in \mathbb{N}.$$

***Exercice 6***. — Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la série entière $\sum a_n^p z^n$ a pour rayon de convergence $R^p$.

***Exercice 7***. — Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Montrer que la série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$$

a un rayon de convergence infini.

***Exercice 8***. — Donner le développement en série entière au voisinage de 0 des fonctions $f$ définies ci-dessous et préciser le rayon de convergence.

a) $f(x) = (2x+3)^{-2}$ b) $f(x) = (x+1)\ln(x+1)$ c) $f(x) = \cos(x+1)$

d) $f(x) = \sqrt{2-x}$ e) $f(x) = -\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}$

***Exercice 9***. — Trouver le rayon de convergence $R$, calculer la somme pour tout réel $x$ tel que $|x| < R$ et étudier ce qui se passe si $|x| = R$ pour les séries entières suivantes:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{4n^2-1}$ c) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2}{(n-1)(n-2)} x^n$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(3+(-1)^n)^n}$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$ h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n-1}$ i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n$.

***Exercice 10***. — On souhaite réaliser un développement en série entière de la fonction

$$f \ : \ z \in \mathbb{C} \longmapsto \frac{1}{z^2 + 3z + 2}$$

en $z_0 = -4$. Pour cela, on pose

$$g \ : \ h \in \mathbb{C} \longmapsto f(z_0 + h) \in \mathbb{C}.$$

i) Déterminer le développement en série entière en 0 de $g$. On précisera le domaine de convergence.

ii) En déduire le développement voulu. Préciser le domaine de convergence.

***Exercice 11***. — Donner le développement en série entière de

$$z \in \mathbb{C} \mapsto \frac{1}{1+z+z^2} \in \mathbb{C}$$

en 0. Préciser le domaine de convergence.

***Exercice 12***. — Soit exp l'exponentielle complexe. Montrer qu'on a les relations suivantes pour $z \in \mathbb{C}$ et $w \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$ :

$$\overline{\exp z} = \exp \bar{z}$$
$$\exp(z+w) = \exp z \cdot \exp w$$
$$\exp(nz) = (\exp z)^n$$
$$|\exp z| = \exp(\mathrm{Re}\ z)$$

où Re $z$ est la partie réelle de $z$.

***Exercice 13***. — Soit la fonction

$$f\ :\ x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ \exp(-1/x^2) & \text{sinon} \end{cases}$$

i) Montrer que $f$ est continue en 0.

ii) Pour tout $n > 0$, montrer qu'il existe $P_n$ un polynôme tel que

$$f^{(n)}(x) = P_n(1/x)\exp(-1/x^2), \quad \forall x \neq 0$$

iii) En déduire que pour tout $n > 0$, la dérivée $f^{(n)}$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ en posant $f^{(n)}(0) = 0$.

iv) Pour $n > 0$, écrire le développement de Taylor-Young de $f$ en 0.

v) Est-ce que $f$ est développable en série entière en 0 ?

***Exercice 14***. — Soit la série entière

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n-1)\cdots 1}.$$

Trouver le rayon de convergence. Trouver une équation différentielle simple vérifiée par $S$. En résolvant cette équation en déduire que, pour tout $x$ réel,

$$S(x) = e^{x^2/2} \int_0^x e^{-t^2/2}\, dt.$$

***Exercice 15***. — Chercher la série entière solution de l'équation différentielle

$$y'' + xy' + y = 0,$$

vérifiant les conditions $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

***Exercice 16***. — Chercher les séries entières solutions des équations différentielles suivantes:

a) $(1+x^2)y'' + 2xy' - 2y = 2$ b) $(x^2+x)y'' + (3x+1)y' + y = \dfrac{1+x}{(1-x)^3}$

c) $x^2y'' - x(x+6)y' + 3(x+4)y = 0$ d) $x^2y'' - x(x+4)y' + 2(x+3)y = 0.$