SÉRIES NUMÉRIQUES

Exercice 1. — Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries à termes positifs. Montrer que la série de terme général $\max(u_n, v_n)$ est convergente si et seulement si les séries de terme général u_n et v_n sont les deux convergentes.

Exercice 2. — Calculer la somme des séries dont le terme général u_n est donné ci-dessous :

$$a)\ \ln\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\quad (n\geq 1)\qquad b)\ \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\quad (n\geq 0)$$
$$c)\ \frac{3^n}{7^{n-2}}\quad (n\geq 2)\qquad d)\ \ln(1+x^{2^n})\quad (n\geq 0,\ 0<x<1)$$

Exercice 3. — Étudier la nature des séries dont le terme général u_n est donné ci-dessous (comparaison à une série géométrique)

$$a)\ \frac{3^n+n^4}{5^n-3^n}\qquad b)\ \frac{\cosh(2n)}{\cosh(3n)}\qquad c)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)^n$$
$$d)\ \tanh(n+a)-\tanh(n)\quad (a\in\mathbb{R})\qquad e)\ (3+(-1)^n)^{-n}\qquad f)\ \frac{1}{1+x^{2n}}\quad (x\in\mathbb{R})$$

Exercice 4. — Étudier la nature des séries dont le terme général u_n est donné ci-dessous (comparaison à une série de Riemann)

$$a)\ 1-\cos\frac{1}{n}\qquad b)\ \sqrt[n]{\tfrac{n}{n+1}}-1\qquad c)\ n^{-1-2/n}$$
$$d)\ e^{\cos(1/n)}-e^{\cos(2/n)}\qquad e)\ x^{\ln n}\quad (x\in\mathbb{R}_+^*)\qquad f)\ n^2a^{\sqrt{n}}\quad (a\in\mathbb{R}_+^*)$$

Exercice 5. — Soit $\sum u_n$ une série réelle absolument convergente. Montrer que, pour tout entier $p>0$, la série $\sum u_n^p$ est convergente.

Exercice 6. —

a. Soient x et y deux réels positifs. Montrer que
$$\sqrt{xy}\leq x+y.$$

b. Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes positifs. Déduire de a. que la série de terme général $\sqrt{u}_n/n$ est convergente.

Exercice 7. — Étudier la nature des séries dont le terme général u_n est donné ci-dessous (règles de Cauchy et d'Alembert)

$$a)\ \frac{n!}{a^n}\ (a>0)\qquad b)\ \frac{n!}{n^n}\qquad c)\ \frac{a^n}{n^a}\ (a>0)\qquad d)\left(a+\frac{1}{n}\right)^n\ (a>0)$$
$$e)\ \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n)}\ (a>0)\qquad f)\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n^2}\ (x>0)\qquad g)\left(\frac{\sin^2 n}{n}\right)^n$$

Exercice 8. — Déterminer la nature de la série de terme général u_n, lorsque u_n est donné par (comparaison à une série de Bertrand)

$$a)\ u_n=(1-e^{1/n^2})\sqrt{\ln n}\qquad b)\ u_n=\frac{1}{\ln n!}\qquad u_n=n^{n^{-a}}\ (a>0)$$

Exercice 9. — Étudier la nature de la série de terme général $u_n=\dfrac{a^n+1}{a^{2n}+n}$, $(a>0)$.

Exercice 10. — Étudier la convergence et la convergence absolue des séries dont le terme général u_n est donné ci-dessous (critère de Leibniz et d'Abel)

$$a)\ (-1)^n \arctan\frac{1}{n} \quad b)\ \sin\left(\left(n+\frac{a}{n}\right)\pi\right)\ (a\in\mathbb{R}) \quad c)\ \frac{(-1)^n}{n^a+(-1)^n}\ (a\neq 0)$$

$$d)\ \frac{(-1)^n}{n+2\sin n} \quad e)\ (-1)^n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right) \quad f)\ \ln\left(1+\frac{\cos n}{\sqrt{n}}\right) \quad g)\ \frac{\sin 2n}{n^2-n+1}$$

Exercice 11. — On pose $e=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}$.

a. Montrer que pour tout $n>0$, on a

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}<e<\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{1}{n\cdot n!}. \tag{1}$$

b. En déduire que e est irrationnel. (Si $e=a/q$, appliquer (1) avec $n=q$).

***Exercice 12* (difficile)**. — Montrer par le critère de Cauchy que la série $\sum_{n\geq 1}\frac{\cos\ln n}{n}$ diverge.

Exercice 13. — Soit ϕ une bijection de $\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$.

a. Donner un exemple d'une telle application (différente de l'identité).

b. On considère la série de terme général

$$u_n=\frac{\phi(n)}{n^2},\quad n\geq 1$$

Soit (S_n) la suite des sommes partielles associée. Montrer que, pour tout $n\geq 1$, on a la minoration

$$S_{2n}-S_n\geq\frac{1}{8}$$

c. En déduire que la série diverge vers $+\infty$.

Exercice 14. — Soit (u_n) une suite de réels positifs. Comparer la nature des séries de terme général

$$u_n,\qquad \frac{u_n}{1+u_n},\qquad \frac{u_n}{1-u_n}$$