SUITES NUMÉRIQUES

Bornes supérieure et inférieure

Exercice 1. — Calculer, lorsqu'elle(s) existe(nt), la borne supérieure et la borne inférieure sur $\mathbb{R}$ des ensembles suivants. Préciser si elle(s) sont atteinte(s) sur l'ensemble.

(i) $A = [-3, \sqrt{2}[$.
(ii) $A = [-1, \infty[$.
(iii) $A = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.
(iv) $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^4 \leq 6\}$.
(v) $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^3 \leq 6\}$.
(vi) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \exp x < 1\}$.
(vii) $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid \exp x < 1\}$.
(viii) $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 1/2 \leq x^2 \leq 2\}$.

Exercice 2. — Soient A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$. On suppose que :

$$\forall x \in A, \quad \exists y \in B \mid x \leq y.$$

Comparer $\sup A$, $\sup B$, $\sup(A \cup B)$ et $\sup(A \cap B)$.

Limites supérieure et inférieure

Exercice 3. — Déterminer les limites supérieures et inférieures pour les suites :

$$u_n = (-1)^n + \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad v_n = \begin{cases} (1 + \frac{1+(-1)^p}{p})^p & \text{si } n = 2p \\ (1 + \frac{1}{p})^p & \text{si } n = 2p+1. \end{cases}$$

Convergence des suites

Exercice 4. — Déterminer les limites des suites suivantes (si elles existent) :

$$\frac{\sin(n^2)}{n}, \qquad \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}(a > 0,\ b > 0), \qquad \frac{n^3 + 5n}{5n^3 + \cos(n) + 1/n^2},$$

$$n - \sqrt{(n+a)(n+b)}\ \ (a, b) \in \mathbb{R}_+^2, \qquad (\sqrt{4n^4 + 2n + 1} - 2n^2)(2n+1).$$

définies pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 5. — Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

converge et calculer sa limite.

Exercice 6. — Etudier la suite réelle définie par récurrence $u_{n+1} = \sin(u_n)$, u_0 réel donné.

Exercice 7. — La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$u_n = \frac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\ldots(1+\sqrt{n})}$$

est-elle monotone ? convergente ?

Exercice 8. — Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle pour laquelle il existe k, avec $0 < k < 1$, tel que pour tout entier m, on ait $|u_{m+1}| < k|u_m|$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

Exercice 9. — Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{(n+1)!} \quad n \geq 0 \end{cases}$$

et posons

$$v_n = u_n + 1/n! \quad n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes [1] En déduire qu'elles convergent.

Exercice 10. — Soient a et b deux réels vérifiant $0 < a \leq b$. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles définies par :

(i) $u_0 = a$ et $v_0 = b$.
(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le terme u_{n+1} est la moyenne harmonique de u_n et de v_n, i.e.

$$u_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}}$$

et le terme v_{n+1} est la moyenne arithmétique de u_n et de v_n, i.e.

$$v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

1. Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite l.
2. Montrer que la moyenne géométrique $\sqrt{u_n v_n}$ est constante pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire la valeur de l.

Exercice 11. — Soit α un réel tel que la suite $(\sin(n\alpha))$ converge vers l.

1. Montrer que la suite $(\cos^2(n\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $1 - l^2$.
2. Montrer que $l = 0$ (utiliser une expression de $\sin(2n\alpha)$).
3. Montrer que $\sin\alpha = 0$ et donc que α est un multiple entier de π (utiliser une expression de $\sin((n+1)\alpha)$).
4. (difficile) Soit

$$u_n = \cos(\sqrt{2}n\pi) \quad n \in \mathbb{N}$$

Trouver une sous-suite convergente de (u_n).

Approximation décimale et densité de $\mathbb{Q}$

Exercice 12. — On définit la suite réelle (u_n) par

$$u_n = 10^{-n} E(10^n(\sqrt{2})), \quad n \in \mathbb{N}$$

où $E(x)$ désigne la partie entière de x.

1. Calculer u_0, u_1, u_2, u_3. Que constatez-vous ?
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in \mathbb{Q}$.
3. Montrer que (u_n) est croissante.
4. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < \sqrt{2} - u_n \leq 10^{-n}$$

5. En déduire que (u_n) converge vers $\sqrt{2}$.
6. Généralisation : pour tout $x \in \mathbb{R}$, s'inspirer de ce qui précède pour construire une suite de rationnels (u_n) qui converge vers x.
7. En déduire la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

1. On rappelle que deux suites (u_n) et (v_n) sont *adjacentes* si

i. (u_n) est croissante, (v_n) décroissante,
ii. pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq v_n$,
iii. on a $\lim_n v_n - u_n = 0$.

Suites extraites, suites de Cauchy

Exercice 13. — Soit (u_n) une suite réelle. On suppose que les sous-suites

$$(u_{2n}), \qquad (u_{3n}), \qquad (u_{2n+1})$$

convergent. Montrer que (u_n) converge.

Exercice 14. — Écrire la négation de (u_n) *est une suite de Cauchy* . Montrer que les suites suivantes ne sont pas de Cauchy.

$$((-1)^n)_{n\geq 0}, \qquad \left(\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}\right)_n .$$

Exercice 15. — On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n).$$

1. Montrer que pour tout $n \in N^*$,

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}.$$

2. Déduire que (u_n) est une suite décroissante et minorée. En déduire qu'elle converge.
3. Retrouver b) en montrant que (u_n) est une suite de Cauchy. (Indication : $0 \leq u_n - u_{n+p} \leq 1/n$ pour tout $p \geq 1$).

Exercice 16. — Soit (u_n) une suite réelle telle que :

$$|u_n - u_{n+1}| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Montrer que (u_n) converge.

Exercice 17. — Soit (u_n) une suite réelle positive ne tendant pas vers $+\infty$. Montrer que l'on peut en extraire une sous-suite bornée.

Exercice 18. — Soit (u_n) une suite réelle divergeant vers $+\infty$. Montrer, en utilisant uniquement la définition de $\lim(u_n) = +\infty$ et la définition de suites de Cauchy que (u_n) n'est pas de Cauchy.

Pour s'entraîner...

***Examen* (2011-2012).** — Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ définies par

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

sont adjacentes. Que peut-on en conclure ?

***Partiel* (2011-2012).** — Ecrire sous forme quantifiée l'expression suivante :

la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ n'est pas bornée

***Partiel* (2012-2013).** —

Question 1. — Déterminer si les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont bornées, puis si elles sont convergentes.

$$u_n = \frac{2+\cos(n)}{\sqrt{n}} \qquad v_n = \frac{2+\cos(n)}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}.$$

Question 2. — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Parmi les suites ci-dessous, trouver celles qui sont extraites d'une autre :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}, \quad (u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}, \quad (u_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}.$$

Justifier.

Question 3. — Soient $u_n = \frac{n+1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}$ et $v_n = \frac{n-1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}$. Calculer

$$\limsup_{n\to\infty} u_n, \qquad \limsup_{n\to\infty} v_n, \qquad \text{et} \qquad \limsup_{n\to\infty}(u_n+v_n).$$

Question 4. — On considère la suite réelle définie par

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{2}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $u_n < 2$.
2. Montrer que la suite u_n est croissante.
3. En déduire qu'elle converge et calculer sa limite.

Question 5. — Montrer que

$$u_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}$$

n'est pas une suite de Cauchy.

Exercices complémentaires

Exercice 19. — Soit (u_n) une suite réelle. On définit (v_n) par

$$v_n = \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

a) Montrer que si (u_n) converge vers $l \in \overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{-\infty, +\infty\}$ alors la suite (v_n) converge aussi vers l. Application : déterminer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(1 + 2^{1/2} + \cdots + n^{1/n}\right).$$

b) Montrer que si (u_n) est croissante et si (v_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$ alors (u_n) converge vers l.

c) Montrer que si (u_n) est une suite de réels strictement positifs que converge vers l alors la suite de terme général

$$w_n = (u_0 u_1 \ldots u_n)^{1/n}$$

a pour limite l.

d) Soit (a_n) une suite telle que

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = l,$$

montrer que $\lim_{n\to\infty} a_n/n = l$. En déduire que si (b_n) est une suite de réels strictement positifs, telle que $\lim_{n\to\infty} b_{n+1}/b_n = l$, alors $\lim_{n\to\infty} b_n^{1/n} = l$.