Analyse – Math31

Temps disponible: 2 heures

Documents et calculatrices interdits. Toutes les réponses doivent être justifiées. On pourra admettre la réponse à une question afin de répondre aux questions suivantes.

Exercice 1 (Question de cours)**.** On souhaite montrer que a est valeur d'adhérence d'une suite numérique (u_n) si et seulement si il existe une suite extraite de (u_n) qui tend vers a.

a) Rappeler la définition de valeur d'adhérence.
b) Montrer l'assertion si $a = +\infty$.
c) Montrer que $a \in \mathbb{R}$ est valeur d'adhérence de (u_n) s'il existe (u_{n_k}) convergente vers a.
d) Soit $a \in \mathbb{R}$ valeur d'adhérence de (u_n). Trouver une suite extraite (u_{n_k}) de limite a.
e) Soit $u_n = (2 + 1/n)\tan(n\pi/3)$. Dire quelles sont les valeurs d'adhérence de (u_n) puis déterminer $\limsup_{n\to\infty} u_n$ et $\liminf_{n\to\infty} u_n$.

Corrigé 1. La suite $(\tan(n\pi/3))$ est périodique de période 3 et prend valeurs $(0, \sqrt{3}, -\sqrt{3})$ lorsque le reste de la division de n par 3 vaut $(0, 1, 2)$: on a donc trouvé les 3 valeurs d'adhérence de cette suite. Par contre, $(2 + 1/n)$ tend vers 2 : il en est de même pour toute suite extraite. Chaque prouit de suite extraites convergentes tend vers une valeur d'adhérence du produit, donc $\{0, 2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}\}$ sont valeurs d'adhérence de (u_n).

De plus, comme (u_n) est bornée, si a en est une valeur d'adhérence, il existe une suite extraite (u_{n_k}) de (u_n) qui tend vers a, donc $(\tan(n_k\pi/3))$ tend vers $a/2$, ainsi $a = 0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$.

Conclusion : $\{0, 2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}\}$ sont les valeurs d'adhérence de (u_n). On a alors $\limsup_{n\to\infty} u_n = 2\sqrt{3}$ et $\liminf_{n\to\infty} u_n = -2\sqrt{3}$.

Exercice 2. Soit $u_0 \in [-1, 0]$ et $f(x) = x^2 - 1$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) Montrer qu'il existe un unique $x_0 \in [-1, 0]$ tel que $f(x_0) = x_0$ puis déterminer x_0.
2) Montrer que $u_n \in [-1, 0]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $I_1 =]-1, x_0[$ et $I_2 =]x_0, 0[$.

3) Étudier les variations de f puis montrer que $u_n \in I_1$ implique $u_{n+1} \in I_2$.
4) Montrer que $f(f(x)) - x = x(x+1)(x^2 - x - 1)$ puis que, si $u_n \in I_1$, alors $u_{n+2} < u_n$.
5) Déduire que, si $u_0 \in I_1$, alors (u_{2n}) tend vers -1. Qu'arrive-t-il à (u_{2n+1})?
6) Conclure que (u_n) converge si et seulement si $u_n = x_0$ pour tout n.

Corrigé 2. On a $f(x) = (x - 1)(x + 1)$ concave et décroissante en l'intervalle $[-1, 0]$.

1) Les points fixes de f sont les solutions de $x^2 - x - 1 = 0$, donc $(1 \pm \sqrt{5})/2$ et seulement $x_0 = (1 - \sqrt{5})/2$ appartient à $[-1, 0]$.
2) Par récurrence sur n, comme $u_0 \in [-1, 0]$, il suffit de montrer que, si $u_n \in [-1, 0]$, alors $u_{n+1} = u_n^2 - 1 \in [-1, 0]$ i.e. $u_n^2 - 1 \geq -1$ (ce qui est évident) et $u_n^2 - 1 \leq 0$. Or $u_n^2 - 1 \leq 0$ équivaut à $-1 \leq u_n \leq 1$, ce qui est satisfait par u_n.
3) Bien sûr f est strictement décroissante sur $[-1, 0[$. Si $u_n \in I_1$ i.e. $-1 < u_n < x_0$, alors $u_{n+1} = f(u_n) > f(x_0) = x_0$. De plus $u_{n+1} < 0$ car $u_{n+1} = 0$ ssi $u_n = -1$.
4) On a $f(f(x)) - x = (x^2 - 1)^2 - 1 - x = x(x^3 - x - 1) = x(x+1)(x^2 - 2x - 1)$. On en déduit par une étude de signe facile que $f(f(x)) < x$ pour $x \in I_1$ et $f(f(x)) > x$ pour $x \in I_2$. Donc $u_{n+2} = f(f(u_n)) < u_n$ si $u_n \in I_1$ et $u_{n+2} > u_n$ si $u_n \in I_2$.

5) Remarquons que, si a est limite de (u_{2n}), alors $f(f(a)) = a$ donc $a \in \{0, -1, x_0\}$. Aussi, $u_{2n+2} = f(f(u_n)) \neq -1$ si $u_n \neq -1$.

Soit alors $u_0 \in I_1$. La suite (u_{2n}) est strictement décroissante, du moment que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{2n} \in I_1$, donc $u_{2n+2} < u_{2n}$ d'après le point précédent. Par ailleurs, $u_{2n} \in I_1$ est clair par récurrence car $u_0 \in I_1$ et, si $u_{2n} \in I_1$ alors $u_{2n+2} < u_{2n} < x_0$ et $u_{2n+2} \neq -1$, donc $u_{2n+2} \in I_1$.

Par conséquent, est (u_{2n}) convergente, car décroissante et minorée par -1, donc de limite $a \in [-1, x_0[$ et par continuité de f on a $f(f(a)) = a$, donc $a = -1$.

Par le même raisonnement on trouve, comme $u_1 \in I_2$, (u_{2n+1}) croissante et majorée par 0 donc convergente vers $b \ni]x_1, 0]$ satisfaisant $f(f(b)) = b$, donc $b = 0$.

6) On a (u_n) convergente vers x_0 si $u_0 = x_0$ car (u_n) est alors constante. En revanche, si $u_0 \in I_1$ ou $u_0 = -1$, on trouve les suites extraites (u_{2n}) de limite -1 et (u_{2n+1}) de limite 0 donc (u_n) ne peut converger. Aussi, si $u_0 \in I_2$ ou $u_0 = 0$, on a (u_{2n+1}) de limite -1 et (u_{2n}) de limite 0 donc (u_n) diverge.

Exercice 3. Étudier la nature des séries numériques $\sum u_n$ de terme général (u_n) suivantes, selon la valeur de $a, c \in \mathbb{R}$ et de $b \in \mathbb{R}_{>0}$:

1. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$,
2. $u_n = \left(\frac{n}{n+a}\right)^{n^2}$,
3. $u_n = \frac{n^7}{b^n}$,
4. $u_n = (-1)^{3n} \frac{n!}{(2n)!}$,
5. $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^c}$.

On étudiera, pour les séries à signe variable, la convergence simple et absolue.

Corrigé 3. On utilise les règles usuelles de Cauchy et d'Alembert, les séries alternées et quelques équivalents.

(1) On écrit :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^4-1}} =$$
$$= \frac{(n^2+1) - (n^2-1)}{(\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1})\sqrt{n^4-1}} \sim \frac{1}{n^3},$$

Ainsi $\sum u_n$ converge, étant positive et équivalente à une série de Riemann convergente.

(2) D'après Cauchy, on calcule :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+a}\right)^n.$$

On se ramène donc à calculer :

$$\lim_{n\to\infty} n \ln\left(\frac{n}{n+a}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{-\ln(1+ax)}{x} = -a,$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = e^{-a},$$

donc la série converge pour $a > 0$ et diverge pour $a < 0$. Quant à $a = 0$, u_n vaut constamment 1, donc $\sum u_n$ diverge.

(3) Soit $u_n = \frac{n^7}{b^n}$. Si $b \leq 1$, (u_n) ne tend pas vers 0 donc $\sum u_n$ diverge. Si $b > 1$, on choisit $b_0 \in]1, b[$, donc $\sum 1/b_0^n$ converge et $n^7 \leq (b/b_0)^n$ à partir d'un certain rang, donc $u_n < 1/(b_0)^n$ à partir d'un certain rang, ainsi $\sum u_n$ converge.

(4) La série $u_n = (-1)^{3n}\frac{n!}{(2n)!}$ converge absolument donc simplement. En effet, par d'Alembert, on a :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!(n+1)!}{n!(2(n+1))!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} = 0 < 1.$$

(5) Si $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^c}$, la série $\sum u_n$ converge absolument ssi $c > 1$ car c'est une série de Riemann. En revanche on a convergence simple pour $c > 0$ d'après le critère pour les séries alternées et divergence pour $c \leq 0$ de façon évidente.

Exercice 4. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Posons $u_n = \ln(n) + a\ln(n+2) + b\ln(n+3)$ et $v_n = \frac{1}{(n^2-1)n^a}$.

1. Montrer que (u_n) tend vers 0 si et seulement si $a + b + 1 = 0$.
2. Soit $a+b+1 = 0$. Trouver $s, r \in \mathbb{R}$ de sorte que (sn^{-r}) soit équivalent à (u_n) lorsque $n \to \infty$, puis montrer que $\sum u_n$ converge si et seulement si $a = -3$, $b = 2$.
3. Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ lorsque $a = -3$, $b = 2$.
4. Dire pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ la série $\sum v_n$ converge.
5. Soit $a = 1$. Trouver $c, d, e \in \mathbb{R}$ tels que $v_n = \frac{c}{n-1} + \frac{d}{n} + \frac{e}{n+1}$.
6. Calculer $\sum_{n=2}^{\infty} v_n$ lorsque $a = 1$.

Corrigé 4. Étudions $\sum u_n$.

(1) On a :

$$0 = \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \ln\Big(n(n+2)^a(n+3)^b\Big) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} n(n+2)^a(n+3)^b = 1,$$

ce qui arrive ssi $a + b + 1 = 0$.

(2) Soit $a + b + 1 = 0$ i.e. $b = -1 - a$ On a :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{u_n}{sn^{-r}} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+\frac{a}{n+2}+\frac{b}{n+3}}{-rsn^{-r-1}} = \\ &= -\lim_{x\to\infty} n^{r+1}\frac{(5+3a+2b)n+6}{rsn(n+2)(n+3)} = \\ &= -\lim_{x\to\infty} n^{r+1}\frac{(3+a)n+6}{rsn(n+2)(n+3)} = 1\end{aligned}$$

ssi, $a \neq -3$, $r = 1$, $s = -3 - a$ ou $a = -3$, $r = 2$, $s = -3$.

Ainsi, $\sum u_n$ est équivalente à une série de Riemann $\sum 1/n^\alpha$ d'exposant $\alpha = 1$ si $a \neq -3$, donc $\sum u_n$ diverge, tandis que $\alpha = 2$ si $a = -3$, donc dans ce cas $\sum u_n$ converge.

(3) On calcule $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ donc :

$$\begin{aligned}s_n &= \sum_{k=1}^{n} \ln(k) - 3\ln(k+2) + 2\ln(k+3) = \\ &= \sum_{k=1}^{n}\ln(k) - 3\sum_{k=3}^{n+2}\ln(k) + 2\sum_{k=4}^{n+3}\ln(k) = \\ &= \ln(2) - 2\ln(3) + 2\ln(n+3) - \ln(n+2) - \ln(n+1).\end{aligned}$$

Or $\lim_{n\to\infty} 2\ln(n+3) - \ln(n+2) - \ln(n+1) = 0$, donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \ln(2) - 2\ln(3) = \ln(2/9).$$

(4) On regarde v_n. C'est équivalent à une série de Riemann donc convergente ssi $a > -1$.

(5) On impose l'identité de polynômes :

$$cn(n+1) + d(n^2-1) + en(n-1) = 1,$$

donc $d = -1$, $c - e = 0$ et $c + d + e = 1$, ainsi $d = -1$, $c = e = 1/2$.

(6) On calcule :

$$\begin{aligned} t_n := \sum_{k=2}^{n} v_k &= \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k+1} = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+1}\frac{1}{k} = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n+1)} = \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n+1)}, \end{aligned}$$

Donc :

$$\sum_{n=2}^{\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} t_n = \frac{1}{4}.$$