Notes du cours d'analyse

Daniele Faenzi

13 novembre 2017

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

SUITES NUMÉRIQUES

Ce chapitre contient des rappels de l'UE Maths21, notamment sur la droite réelle et les suites numériques. Par conséquent, seulement certaines démonstrations seront développées : je les marque en bleu.

1.I. La droite réelle

Nous rappelons quelques propriétés de la droite réelle $\mathbb{R}$. On construira celle-ci avec les coupures rationnelles. Entre temps on supposera que l'on soit déjà familier avec $\mathbb{R}$.

1.I.A. Caractère archimédien de la droite réelle. —

1.I.A.1. Axiome d'Archimède. — Le résultat suivant est appelé traditionnellement axiome d'Archimède.

Théorème 1.I.1. — *Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe alors $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > x$.*

Une preuve sera donnée dans le chapitre sur la construction de $\mathbb{R}$.

Corollaire 1.I.2. — *Soit $x \in \mathbb{R}$ et $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$. Il existe alors un entier n tel que $n\varepsilon > x$.*

Démonstration. — Il suffit d'appliquer l'axiome d'Archimède 1.I.1 à $\frac{x}{\varepsilon}$. □

Proposition 1.I.3. — *Soit $x \in \mathbb{R}$ et $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$. Il existe alors un unique entier n tel que :*

$$n\varepsilon \leq x < (n+1)\varepsilon.$$

Démonstration. — Appliquons le corollaire précédent à $|x|$. Il existe alors un entier m tel que $|x| \leq m\varepsilon$, donc $-m\varepsilon \leq x \leq m\varepsilon$. On considère alors :

$$P = \{p \in \mathbb{Z} \mid p\varepsilon \leq x\}.$$

Bien sûr, $-m \in P$ donc $P \neq \emptyset$. De plus, $x \leq m\varepsilon$ donc $p \in P$ vaut au plus m. Soit alors n le plus grand élément de P. On a $n\varepsilon \leq x$, et $(n+1)\varepsilon > x$ car $n+1$ n'appartient pas à P. □

1.I.A.2. Densité des rationnels dans les réels. — Le théorème suivant affirme que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, autrement dit que tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ recoupe des points de $\mathbb{Q}$.

Théorème 1.I.4. — *Soit $x < y \in \mathbb{R}$. Alors il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $x < r < y$.*

Démonstration. — Prenons $\varepsilon = y - x > 0$ et $1 \in \mathbb{R}$. Il existe alors un entier q tel que $q\varepsilon > 1$ d'après le corollaire 1.I.2. On remplace ensuite ε pour la nouvelle valeur $\varepsilon = 1/q$, et on utilise la proposition 1.I.3 pour trouver un unique entier p tel que:

$$\frac{p}{q} \leq x < \frac{p+1}{q}.$$

On a alors :

$$qy > 1 + qx \geq 1 + p.$$

Donc $r = \frac{p+1}{q} < y$. Ainsi $x < r < y$. Bien entendu, $r \in \mathbb{Q}$. □

1.I.B. Bornes. — Nous avons déjà évoqué l'idée de suite bornée.

1.I.B.1. Majorant et minorant. — Un majorant est juste une barrière supérieure sur les éléments d'un ensemble. Il n'appartient pas forcément à l'ensemble de départ.

Définition 1.I.5. — Soit X une partie de $\mathbb{R}$. Un *majorant* de X est un nombre $b \in \mathbb{R}$ tel que $x \leq b$ pour tout $x \in X$. Un *minorant* de X est $a \in \mathbb{R}$ tel que $x \geq a$ pour tout $x \in X$.

Clairement, si b est un majorant de X, alors $b' \geq b$ est aussi un majorant de X. De même si a est un minorant de X, alors $a' \leq a$ est aussi un minorant de X.

On dit que X est *majorée* si X admet un majorant $b \in \mathbb{R}$, et que X est *minorée* si X admet un minorant $a \in \mathbb{R}$. Une partie majorée et minorée et appelée *bornée*. Ces adjectifs s'appliquent à suite numérique (u_n) en posant $X = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

1.I.B.2. Borne supérieure et inférieure. — Le concept de borne supérieure repose sur l'idée de plus petit majorant.

Définition 1.I.6. — Soit X une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. Une *borne supérieure* de X est un majorant b de X tel que, pour toute autre majorant c de X, on ait $b \leq c$.

Si b et b' sont deux bornes supérieures de X, alors b' étant un majorant de X, on a $b \leq b'$ par définition de $b = \sup X$ comme minimum des majorants. Mais pour la même raison on a $b' \leq b$ donc $b = b'$. Ceci nous autorise à noter $b = \sup X$.

Proposition 1.I.7. — *Soit $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Alors $b = \sup X$ si et seulement si :*

i) pour tout $x \in X$, on a $x \leq b$;

ii) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in X$ tel que $b - x < \varepsilon$.

Démonstration. — Soit $b = \sup X$. Puisque b est un majorant de X, on a $x \leq b$ pour tout $x \in X$. Ensuite, fixons $\varepsilon > 0$. Si pour tout $x \in X$ on avait $x \leq b - \varepsilon$, alors $b - \varepsilon$ serait un majorant de X strictement plus petit de b, ce qui contredit la minimalité de b. Donc il existe $x \in X$ tel que $x > b - \varepsilon$, ce qui montre (ii).

Réciproquement, si (i) est valide, b est un majorant de X. Si $c < b$ est un autre majorant de X, alors $\varepsilon = b - c > 0$, et d'après (ii) il existe $x \in X$ tel que $b - x < \varepsilon = b - c$. Donc $x > c$, et c ne peut être un majorant de X. Donc forcément $b = \sup X$. □

Remarque 1.I.8. — La borne supérieure d'une partie X de $\mathbb{R}$ n'a aucune raison d'appartenir à X. Par exemple, si $X = \{-1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$, on a $\sup X = 0$, mais $0 \notin X$.

Le théorème suivant est appelé *propriété de la borne supérieure.*

Théorème 1.I.9. — *Toute partie X non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.*

Une preuve sera donnée lors de la construction de $\mathbb{R}$.

Théorème 1.I.10. — *Les nombres réels forment le seul corps totalement ordonné ayant la propriété de la borne supérieure.*

1.I.C. Définition de $\mathbb{R}$. —

1.I.C.1. Coupures de Dedekind dans les rationnels. —

Définition 1.I.11. — Une *coupure* de Dedekind de $\mathbb{Q}$ est une partie $A \subset \mathbb{Q}$ satisfaisant à:

i) $A \neq \emptyset$, $A \neq \mathbb{Q}$;

ii) pour tout $a \in A$ et tout rationnel $x < a$, on a $x \in A$;

iii) pour tout $a \in A$, il existe $x \in A$, avec $x > a$.

Étant donné $r \in \mathbb{Q}$, on pose $A(r) = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < r\}$. Ceci est évidemment une coupure.

Exemple 1.I.12. — Soit :

$$A = \{r \in \mathbb{Q}_{\geq 0} \mid r^2 < 2,\} \cup \mathbb{Q}_{\leq 0}.$$

Ceci est une coupure, en effet en premier lieu $\emptyset \neq A \neq \mathbb{Q}$. Deuxièmement, si $r \in A$ et $x < r$, on a facilement $x \in A$: si $x < 0$ c'est clair, sinon $r \geq 0$ aussi, et $x < r$ implique $x^2 < r^2 \leq 2$. Finalement, si $r^2 < 2$, on peut trouver un rationnel $x > r$ tel que $r^2 < 2$. Par exemple :

$$x = \frac{2r+2}{r+2}.$$

Définition 1.I.13. — La *droite réelle* $\mathbb{R}$ est l'ensemble des coupures de Dedekind de $\mathbb{Q}$. Les éléments de la droite réelle (c'est-à-dire, les coupures de $\mathbb{Q}$) seront appelés désormais *nombres réels* et notés usuellement avec une petite lettre.

En associant $A(r)$ à $r \in \mathbb{Q}$, on obtient une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Par abus de notation on écrit $r \in \mathbb{R}$ plutôt que $A(r) \in \mathbb{R}$.

On définit une *relation d'ordre* entre les nombres réels de la manière suivante : si A et B sont deux coupures de Dedekind de $\mathbb{Q}$, on pose $A \leq B$ si et seulement si $A \subset B$, puis $A < B$ si $A \leq B$ et $A \neq B$.

1.I.C.2. Ordre. —

Proposition 1.I.14. — *Soit $A \neq B$ deux coupures de Dedekind de $\mathbb{Q}$. On a alors l'une des deux alternatives : $A \subset B$ ou $B \subset A$.*

Démonstration. — Nous avons deux possibilités :

1. Pour tout $b \in B$, il existe $a \in A$ tel que $a > b$. Dans ce cas, $b \in A$ donc $B \subset A$.

2. Si le cas précédent ne se présente pas, alors il existe $b \in B$ tel que, pour tout $a \in A$, on a $b \leq a$. Il existe alors $b' \in B$ avec $b' < b$ donc $b' < a$, quel que soit $a \in A$. Alors $a \in B$ et $A \subset B$.

$\square$

1.I.C.3. Opérations avec les réels. —

Définition 1.I.15. — On définit l'opération de somme entre nombres réels de la manière suivante : si A et B sont deux coupures de Dedekind de $\mathbb{Q}$, on pose :

$$A+B=\{a+b \mid a \in A, b \in B\}.$$

Ensuite on pose :

$$-A=\{b \in \mathbb{Q} \mid b<-a, \forall a \in A\}.$$

On vérifie immédiatement que $A+B$ et $-A$ sont des coupures de Dedekind de $\mathbb{Q}$. On pose aussi $|A|=A$ si $A \geq 0$ et $|A|=-A$ si $A \leq 0$.

Pour le produit, on commence avec $A \geq 0$ et $B \geq 0$. Dans ce cas on pose :

$$AB=\{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 0\} \cup \{ab \mid A \ni a>0, B \ni b>0\}.$$

En général, on pose :

$$AB=\begin{cases} |A||B|, & \text{si } A \text{ et } B \text{ ont même signe,} \\ -|A||B|, & \text{si } A \text{ et } B \text{ ont signe opposé.} \end{cases}$$

On vérifie que AB est une coupure de Dedekind de $\mathbb{Q}$.

Théorème 1.I.16. — *La droite réelle, avec les opérations définies ci-dessus, est un corps commutatif totalement ordonné, qui contient* $\mathbb{Q}$ *comme sous corps, ayant* 0 *comme élément neutre et* 1 *comme unité, les relations d'ordre de* $\mathbb{R}$ *et de* $\mathbb{Q}$ *étant compatibles.*

La preuve est élémentaire. Rappelons juste ce qu'il faut vérifier, pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}$:

1. $(a+b)+c=a+(b+c)$
2. $a+b=b+a$
3. $ab=ba$
4. $(ab)c=a(bc)$
5. $0+a=a+0=a$
6. $1a=a1=a$
7. $a(b+c)=ab+ac$
8. $-a \in \mathbb{R}$
9. si $a \neq 0$, alors $1/a \in \mathbb{R}$
10. $a \leq b$ implique $a+c \leq b+c$
11. $a \leq b$ et $c \geq 0$ implique $ac \leq bc$.

1.I.C.4. Preuve de l'axiome d'Archimède. —

Démonstration. — Nous revenons à la définition de $\mathbb{R}$ comme ensemble des coupures de Dedekind de $\mathbb{Q}$, et disons $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, autrement il est évident que $n > x$ existe. Le réel x est donc une coupure A de $\mathbb{Q}$, en particulier $A \neq \mathbb{Q}$, et il existe $r \in \mathbb{Q} \setminus A$, donc $r > a$ pour tout $a \in A$. Il existe bien sûr un entier $n > r$, donc $n > a$ pour tout $a \in A$. Alors $A \neq A(n)$ (sans quoi $x \in \mathbb{Q}$) et $A \subset A(n)$. Donc $x < n$. □

1.I.C.5. Preuve de l'existence des bornes. —

Démonstration. — Nous revenons, pour la dernière fois, à la définition de $\mathbb{R}$ comme ensemble des coupures de Dedekind de $\mathbb{Q}$. Rappelons que tout élément est une coupure de Dedekind de $\mathbb{Q}$: nous revenons pour la dernière fois à la notation $A \in \mathscr{A}$ pour cette démonstration. On pose :

$$B = \cup_{A \in X} A.$$

Montrons que B est une coupure de Dedekind de $\mathbb{Q}$. Bien sûr, on a $B \neq \emptyset$. De plus, comme X est bornée, il existe $b\, r \in \mathbb{N}$ tel que $b > x$, pour tout $x \in X$. Donc tout $A \in X$ est contenu dans $A(r)$. Ainsi $B \subset A(r) \neq \mathbb{Q}$. On a montré (i).

Pour montrer (ii), on prend $a \in B$ et un rationnel $x < a$. Puisque $a \in A$, pour un certain $A \in X$, et que A est une coupure de Dedekind rationnelle, on a $x \in A \subset B$ donc $x \in B$.

Pour vérifier (ii), on prend $a \in B$ et on cherche $x \in B$ avec $x > a$. Mais $a \in A$ pour un certain $A \in X$, donc il existe $x \in A \subset B$ avec $x > a$.

Il est clair que B est un majorant de X. En effet, pour tout $A \in X$, on a $A \subset B$ comme nous l'avons déjà observé. Pour montrer que B est le plus petit parmi les majorants de X, on prend une coupure C de Dedekind de $\mathbb{Q}$ qui contient tous les $A \in X$. Alors C contient leur réunion, c'est-à-dire $B \subset C$. □

Exemple 1.I.17. — Soit X l'ensemble des réels x, dont le développement décimal $x = x_0, x_1 x_2 \cdots$ satisfait à :

1. $x_0 = 0$;
2. $x_n = 5$, pour un nombre infini de valeurs de n;
3. $x_1 + x_2 + x_3 = 20$.

On peut voir que $\sup X = 0,993$. Cette borne n'appartient pas à X.

1.II. Convergence des suites numériques

1.II.A. Limite d'une suite. — La convergence des suites est le concept clé de ce cours.

Définition 1.II.1. — Soit (u_n) une suite numérique. On dit que (u_n) converge vers $a \in \mathbb{R}$ si, pour tout réel $\varepsilon > 0$ fixé, il existe un entier n_ε, tel que :

$$|u_n - a| < \varepsilon, \qquad \text{pour tout } n \geq n_\varepsilon.$$

On écrit dans ce cas :

$$\lim_{n \to \infty} u_n = a.$$

On dit que (u_n) tend vers $+\infty$ si, pour tout $M > 0$ il existe un entier m tel que :

$$u_n > M, \qquad \text{pour tout } n \geq m.$$

On dit que (u_n) tend vers $-\infty$ si, pour tout $M < 0$ il existe un entier m tel que :

$$u_n < M, \qquad \text{pour tout } n \geq m.$$

On écrit alors $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$ ou $\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$. Parfois on supprime la partie "$n \to \infty$" des symboles de limite.

1.II.B. Suites convergentes et bornes. — Nous reviendrons dans quelques pages sur l'idée de partie bornée de $\mathbb{R}$. Ici nous remarquons juste qu'une suite convergente est bornée.

Proposition 1.II.2. — *Soit (u_n) convergente vers $a \in \mathbb{R}$. Alors il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on ait $|u_n| \leq b$.*

Démonstration. — Soit (u_n) notre suite et a sa limite. Pour tout ε il existe n_ε tel que, pour tout $n \geq n_\varepsilon$ on ait $|u_n - a| < \varepsilon$. Il s'en suit que $|u_n| < \varepsilon + |a|$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$|u_n| \leq \max\{|u_0|, \dots, |u_{n_\varepsilon - 1}|, |a| + \varepsilon\} = b.$$

□

1.II.C. Opérations avec les limites. —

Proposition 1.II.3. — *Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques, et supposons :*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = a \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{n\to\infty} v_n = b \in \mathbb{R}.$$

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda a + \mu b,$$
$$\lim_{n\to\infty} (u_n v_n) = ab.$$

De plus, si $a \neq 0$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \neq 0$ pour tout $n \geq N$, et on a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{a}.$$

Démonstration. — Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors des entiers N et M tels que :

$$n \geq N \Longrightarrow |u_n - a| < \frac{\varepsilon}{2|\lambda|},$$
$$n \geq M \Longrightarrow |v_n - b| < \frac{\varepsilon}{2|\mu|}.$$

Donc si $n \geq L = \max(N, M)$, on aura :

$$\left|\lambda u_n + \mu v_n - (\lambda a + \mu b)\right| \leq |\lambda||u_n - a| + |\mu||v_n - b| < |\lambda|\frac{\varepsilon}{2|\lambda|} + |\mu|\frac{\varepsilon}{2|\mu|} = \varepsilon.$$

Ceci montre le premier énoncé, c'est-à-dire la linéarité de la limite.

Pour le produit, on se souviendra de la proposition (1.II.2), qui affirme l'existence de $0 < c \in \mathbb{R}$ tel que $|v_n| \leq c$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$. On remarque :

$$|u_n v_n - ab| \leq |u_n v_n - a v_n| + |a v_n - ab| \leq |v_n||u_n - a| + |a||v_n - b| \leq$$
$$\leq c|u_n - a| + |a||v_n - b|.$$

Il existe alors des entiers N et M tels que :

$$n \geq N \Longrightarrow |u_n - a| < \frac{\varepsilon}{2c},$$
$$n \geq M \Longrightarrow |v_n - b| < \frac{\varepsilon}{2|a|},$$

ou alors si $a = 0$ nous pouvons prendre $M = 0$. Donc pour $n \geq L = \max(N, M)$ on aura :

$$|u_n v_n - ab| \leq c|u_n - a| + |a||v_n - b| < \varepsilon.$$

Finalement pour la division, comme $a \neq 0$, nous pouvons choisir $\delta > 0$ tel que $\alpha := |a| - \delta > 0$ et $M \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq M$, on ait $|u_n - a| < \delta$ et donc par l'inégalité triangulaire

$$|a| - |u_n| < \delta,$$

à savoir

$$|u_n| > \alpha > 0.$$

De plus, pour $n \geq M$ on a :

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{a - u_n}{u_n a}\right| < \frac{|a - u_n|}{|a|\alpha}$$

Étant donné $\varepsilon > 0$, il suffit alors de choisir $P \geq M$ tel que $n \geq P$ entraîne :

$$|u_n - a| < |a|\alpha\varepsilon.$$

Pour $n \geq P$, on aura alors $|1/u_n - 1/a| < \varepsilon$. □

1.II.D. Suites équivalentes. —

Définition 1.II.4. — Deux suites numériques (u_n) et (v_n) sont *équivalentes* s'il existe une suite (ω_n) telle que :

i) $u_n = \omega_n v_n$ à partir d'un certain rang;

ii) $\lim_{n\to\infty}(\omega_n) = 1$.

Proposition 1.II.5. — *Soit (u_n) une suite convergente vers $a \in \bar{\mathbb{R}}$, et soit (v_n) équivalente à (u_n). Alors (v_n) tend aussi vers a.*

Démonstration. — La preuve est immédiate par application de la limite du produit. □

1.II.E. Principe des intervalles emboîtés. — Un intervalle I de $\mathbb{R}$ est un ensemble de la forme $I =]a, b[$, ou $I = [a, b[$, ou $I =]a, b]$, ou $I = [a, b]$, avec $a \leq b \in \bar{\mathbb{R}}$, avec la condition que, si $a = -\infty$, uniquement les écritures $]a, b]$ et $]a, b]$ sont autorisée (et de même pour $b = +\infty$).

On parle d'intervalle ouvert pour $I =]a, b[$, d'intervalle fermé pour $I = [a, b]$. On parle aussi d'intervalle ouvert ou fermé à droite ou à gauche.

Si $a, b \in \mathbb{R}$, on écrit $\ell(I) = b - a$. Si $a = -\infty$ (ou $b = +\infty$) et $a < b$, on écrit $\ell(I) = \infty$.

1.II.E.1. Axiome de Cantor. —

Définition 1.II.6. — Une *suite d'intervalles emboîtes* (I_n) est la donnée de, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un intervalle *fermé borné* I_n, avec $I_{n+1} \subset I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et satisfaisant à:

$$\lim_{n\to\infty} \ell(I_n) = 0.$$

Théorème 1.II.7. — *Soit (I_n) une suite d'intervalles emboîtes. Alors un $c \in \mathbb{R}$, et un seul, qui appartient à tous les I_n, i.e.:*

$$\{c\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n.$$

Démonstration. — Soit $I_n = [a_n, b_n]$. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, nous avons $a_m \leq b_n$, pour tout $m \in \mathbb{N}$. En effet, si $m \leq n$ on a $a_m \leq a_n \leq b_n$ car $I_n \subset I_m$, tandis que si $m \geq n$ on a $a_m \leq b_m \leq b_n$ car $I_m \subset I_n$.

La suite (a_m) est donc majorée, elle admet donc une borne supérieure c d'après le théorème 1.I.10. Bien sûr $c \geq a_m$ pour tout m, et de plus $c \leq b_n$ pour tout n car $a_m \leq b_n$. Ceci montre que $c \in I_n$ quel que soit n, donc $c \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$.

Montrons que $\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$ ne contient que c. S'il n'en était pas ainsi, on aurait un intervalle $I = [a, b]$, contenant c, ayant longueur $b - a > 0$, entièrement contenu dans $\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$. On aurait alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n \leq a < b \leq b_n.$$

Donc $\ell(I_n) = b_n - a_n \geq b - a > 0$, ainsi $\lim_{n\to\infty} \ell(I_n) > 0$, ce qui contredit l'hypothèse $\lim_{n\to\infty} \ell(I_n) = 0$. □

1.II.E.2. Suites adjacentes. —

Définition 1.II.8. — Deux suites numériques (u_n) et (v_n) sont *adjacentes* si :

i) (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante;

ii) $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang;

iii) $\lim_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 0$.

Proposition 1.II.9. — *Soit (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes. Alors :*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. — Évidemment on peut supposer que $u_n \leq v_n$ soit valable pour tout n (quitte à tronquer les deux suites). La preuve est alors la même que pour l'axiome de Cantor, en effet en posant $I_n = [u_n, v_n]$ on obtient une suite d'intervalles emboîtés. □

1.II.F. Suites monotones. — Le résultat suivant est aussi très important.

Théorème 1.II.10. — *Une suite numérique croissante est convergente si et seulement si elle est majorée. Dans ce cas elle converge à sa borne supérieure. Sinon elle tend vers* $+\infty$.

Démonstration. — Soit (u_n) une suite numérique croissante. Si (u_n) n'est pas bornée, alors pour tout $b \in \mathbb{R}$ il existe $n_b \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_b} > b$. Donc $u_n > b$ pour $n \geq n_b$ puisque (u_n) est croissante. Ceci montre que $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

Par contre, si (u_n) est bornée, soit b la borne supérieure de (u_n). Donc $u_n \leq b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $|u_n - b| = b - u_n$. Montrons que (u_n) tend vers b. Soit $\varepsilon > 0$. D'après la Proposition 1.I.7, il existe n_ε tel que $b - u_{n_\varepsilon} < \varepsilon$. Puisque (u_n) est croissante, on a $b - u_n < b - u_{n_b} < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_b$. Ceci montre que (u_n) tend vers b.

Réciproquement, nous avons déjà vu que toute suite convergente est bornée. □

Exemple 1.II.11. — Soit $u_0 \in [-1,1]$ et u_n définit par récurrence par :

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2+1}{2}.$$

On voit par récurrence que (u_n) est croissante et majorée par 1. On a donc $a = \lim_{n\to\infty} u_n$ et $a \leq 1$. De plus, d'après la relation de récurrence, on a :

$$a = \frac{a^2+1}{2},$$

donc $a = 1$.

1.III. Suites de Cauchy, espaces complets

1.III.A. Suite de Cauchy. —

Définition 1.III.1. — Une suite (u_n) est *de Cauchy* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N = N_\varepsilon$ tel que, pour tout $p, q \geq N$, on ait :

$$\left|u_p - u_q\right| < \varepsilon.$$

Exemple 1.III.2. — La suite $(\frac{n+1}{n})_{n\geq 1}$ est de Cauchy. En effet, si on fixe $\varepsilon > 0$, il existe N tel que $1/N < \varepsilon/2$. Alors, pour $n \geq m > N$ on a :

$$\left|\frac{n+1}{n} - \frac{m+1}{m}\right| = \frac{n-m}{nm} \leq \frac{n}{nm} + \frac{m}{nm} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Exemple 1.III.3. — La suite $(\ln n)_{n\geq 1}$ n'est pas de Cauchy. En effet, si $p > n > 0$, on a :

$$\left|\ln p - \ln n\right| = \ln\frac{p}{n}.$$

Donc si $p = 2n$ on a $\left|\ln p - \ln n\right| = \ln 2$, ce qui n'est pas $\leq \varepsilon$ lorsque $\varepsilon < \ln 2$.

***Proposition 1.III.4* (Cauchy par intervalles).** — *Une suite numérique* (u_n) *est de Cauchy si et seulement si, pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* n_ε *et un intervalle fermé* I *avec* $\ell(I) \leq \varepsilon$, *tels que pour tout* $n \geq n_\varepsilon$ *on ait* $u_n \in I$.

Démonstration. — Soit (u_n) de Cauchy et fixons $\varepsilon > 0$. Nous avons alors n_ε tel que, quel que soit $p, n \geq n_\varepsilon$, on a $|u_p - u_n| < \varepsilon/2$. Donc, en fixant $p \geq n_\varepsilon$, pour $n \geq n_\varepsilon$ on a :

$$u_n \in]u_p - \varepsilon/2, u_p + \varepsilon/2[\subset I = [u_p - \varepsilon/2, u_p + \varepsilon/2].$$

On a $\ell(I) = \varepsilon$, ce qui démontre une implication.

Réciproquement, si la propriété "Cauchy par intervalles" est vérifiée, nous prenons $N = N_{\varepsilon/2}$ et l'intervalle I de longueur $\leq \varepsilon/2$ contenant tout u_n lorsque $n \geq N_{\varepsilon/2}$. Si $p \geq N_{\varepsilon/2}$ alors $u_n, u_p \in I$ donc $|u_n - u_p| \leq \ell(I) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$. □

1.III.B. Caractère complet de la droite réelle. — Le théorème suivant est extrêmement important. Il peut s'énoncer en disant que la droite réelle est complète (un espace complet étant, par définition, caractérisé par la convergence de toute suite de Cauchy).

Théorème 1.III.5. — *Une suite numérique (u_n) converge ssi elle est de Cauchy.*

Démonstration. — Soit (u_n) convergente et $a \in \mathbb{R}$ sa limite. Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe alors $N = N_\varepsilon$ tel que, pour tout $n \geq N$, on a $|u_n - a| < \varepsilon$. Alors si $p, q \geq N$, on a :

$$|u_q - u_p| = |u_q - a + a - u_p| \leq |u_q - a| + |u_p - a| < 2\varepsilon.$$

Ceci montre que (u_n) est de Cauchy (car ε est arbitraire).

Maintenant nous démontrons que si (u_n) est de Cauchy, alors (u_n) converge. Pour tout k entier non nul, il existe un entier n_k et un intervalle fermé J_k de longueur $\ell(J_k) \leq 1/k$ tels que, si $n \geq n_k$, alors $u_n \in J_k$. Posons :

$$\begin{aligned} &I_1 = J_1, \\ &I_{k+1} = I_k \cap J_{k+1}, && \text{pour } k \geq 1, \\ &N_k = \max\{n_1, \dots, n_k\}. \end{aligned}$$

Si $n \geq N_k$, alors $u_n \in J_1 \cap \cdots \cap J_k = I_k$. Du fait que $I_k \subset J_k$, on obtient $\ell(I_k) \leq 1/k$. De plus, les intervalles I_k sont clairement emboîtés et fermés. D'après le théorème 1.II.7, on obtient un réel c comme unique point dans l'intersection de tous les I_k.

Montrons que $\lim_{n\to\infty} u_n = c$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors k tel que $1/k < \varepsilon$. Pour $n \geq N_k$, on a $u_n \in I_k$ et $\ell(I_k) < \varepsilon$. Comme $c \in I_k$, on a $|u_n - c| < \varepsilon$, donc (u_n) tend vers c. □

Remarque 1.III.6. — La droite rationnelle $\mathbb{Q}$ n'est pas complète. Par exemple, on peut considérer la suite :

$$u_0 = 1, \qquad u_{n+1} = \frac{2u_n + 2}{u_n + 2}.$$

Cette suite est de Cauchy. En effet, elle est majorée par $\sqrt{2}$ et croissante, donc convergente dans $\mathbb{R}$: ainsi elle est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$. Par contre, elle converge vers $\sqrt{2}$, qui n'est pas dans $\mathbb{Q}$.

1.IV. Suites extraites, plus grande limite, valeurs d'adhérence

1.IV.A. Plus petite et plus grande limite. — On commence par définir la plus petite et plus grande limite.

1.IV.A.1. Limite inférieure et supérieure. —

Proposition 1.IV.1. — *Soit (u_n) une suite. Alors il existe un unique $b \in \bar{\mathbb{R}}$ tel que :*

i) pour tout $d > b$, on a $\sharp\{n \mid u_n > d\} < \infty$;

ii) pour tout $c < b$, on a $\sharp\{n \mid u_n > c\} = \infty$.

On note alors $b = \limsup_{n\to\infty} u_n$.

Démonstration. — Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on considère :

$$E(x) = \{n \in \mathbb{N} \mid u_n > x\}.$$

Ensuite, on définit :

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \sharp E(x) = \infty\}.$$

Remarquons que, si $a \in A$ et $y \leq a$ alors aussi $y \in A$. Nous avons 3 cas :

1. On a $A = \emptyset$. Alors on pose $b = -\infty$ et les conditions sont vérifiées.
2. On a $A = \mathbb{R}$. On pose alors $b = +\infty$ et les conditions sont vérifiées.
3. On a $\emptyset \neq A \neq \mathbb{R}$. Alors A est majoré, car si $A \neq \mathbb{R}$ veut dire qu'il existe $b \notin A$ donc pour tout $a \in A$ on a $b > a$ (sinon b appartiendrait à A). Posons alors :

$$b = \sup(A) \in \mathbb{R}.$$

Si $c < b$, alors comme $b = \sup A$ il existe $a \in A$ tel que $a > c$ (sans quoi b ne serait pas minimal parmi les majorants de A). Ceci montre que $c \in A$ donc $\sharp E(c) = \infty$. Si $d > b$, alors $d \notin A$ car sinon b n'est pas un majorant de A. Donc $d \in B$ et $\sharp E(d) < \infty$.

Pour l'unicité de b, si b' est un réel ayant les mêmes propriétés que b, et $b' < b$, il existe un réel x avec $b' < x < b$. Alors $E(x) = \infty$ car $x < b$ et $E(x) = \infty$ car $x > b'$. Ceci est une contradiction. De même on exclut $b < b'$, donc $b = b'$. □

Remarque 1.IV.2. — En reprenant les cas de la démonstration précédente, on voit que :

1. On a $A = \emptyset$ si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe seulement un nombre fini de valeurs de n telles que $u_n > x$. Ceci veut dire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut trouver N_x tel que, si $n \geq N_x$, alors $u_n \leq x$. Autrement dit $\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$.
2. On a $A = \mathbb{R}$ si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il y a un nombre infini de valeurs de n telles que $u_n > x$. Ceci arrive si et seulement si (u_n) n'est pas majorée.

Exemple 1.IV.3. — Soit $u_n = (-1)^n$. Alors $\limsup_{n\to\infty} u_n = 1$ et $\limsup_{n\to\infty} u_n = -1$. Si $u_n = (-2)^n$ alors $\limsup_{n\to\infty} u_n = +\infty$ et $\limsup_{n\to\infty} u_n = -\infty$.

1.IV.A.2. Infimum des suprema et supremum des infima. — Soit (u_n) une suite numérique. Alors nous définissons deux suites :

$$v_n = \sup\{u_m \mid m \geq n\}, \qquad \text{si } (u_n) \text{ est majorée,} \tag{1}$$

$$w_n = \inf\{u_m \mid m \geq n\}, \qquad \text{si } (u_n) \text{ est minorée.} \tag{2}$$

Remarquons que l'on prend des extrêmes sur des ensembles de plus en plus petits lorsque n augmente. Dans ces circonstances, on a, pour tout n:

$$\begin{aligned} & w_n \le u_n \le v_n, && \\ & v_{n+1} \le v_n, && \text{i. e. } (v_n) \text{ est décroissante,} \\ & w_n \le w_{n+1} && \text{i. e. } (w_n) \text{ est croissante.} \end{aligned}$$

Lorsque ces suites sont définies dans $\mathbb{R}$, un peut considérer leur limite d'après le théorème 1.II.10, et on a le résultat suivant.

Proposition 1.IV.4. — *Soit (u_n) une suite numérique, et définissons (v_n) et (w_n) par les conditions* (1) *et* (2). *Alors :*

$$\begin{aligned} & \limsup_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n, && \textit{si } (u_n) \textit{ est majorée,} \\ & \liminf_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} w_n, && \textit{si } (u_n) \textit{ est minorée.} \end{aligned}$$

Démonstration. — Soit (u_n) majorée et $b = \lim_{n\to\infty} v_n$.

Si $c < b$, alors $c < \inf\{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ donc $c < v_n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Donc $c < \sup\{u_m \mid m \ge n\}$, autrement dit il existe $m \ge n$ tel que $u_m > c$. Ceci nous dit que, pour tout n, on peut trouver $m \ge n$ avec $u_m > c$, donc l'ensemble des m tels que $u_m > c$ est bien infini.

Si $d > b$, alors $d > \inf\{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ donc nous avons au plus un nombre fini de n tels que $v_n > d$, car (v_n) est décroissante. Autrement dit, les n tels que $u_m > d$ pour un certain $m \ge n$ sont en nombre fini, disons $n_0, \dots, n_N$. Donc si $m > n_N$ on a forcément $u_n \le d$. Donc $u_m > d$ seulement pour un nombre fini de m. □

1.IV.A.3. Lien entre la plus petite et plus grande limite et la convergence. —

Proposition 1.IV.5. — *Soit (u_n) une suite numérique. Alors :*

$$\liminf_{n\to\infty} u_n \le \limsup_{n\to\infty} u_n.$$

L'égalité est atteinte si et seulement si (u_n) converge dans $\bar{\mathbb{R}}$, auquel cas :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \limsup_{n\to\infty} u_n = \liminf_{n\to\infty} u_n.$$

Démonstration. — Si (u_n) n'est pas minorée, on a bien entendu $-\infty \le a$, pour n'importe quel $a \in \bar{\mathbb{R}}$. De plus, $\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$ si et seulement si $\limsup_{n\to\infty} u_n = -\infty$ et dans ce cas aussi $\liminf_{n\to\infty} u_n = -\infty$. De même pour $+\infty$. Les cas infinis étant clairs, on suppose désormais (u_n) bornée.

Posons $b = \limsup_{n\to\infty} u_n$ et $a = \liminf_{n\to\infty} u_n$. Il est clair que $a \le b$ car $w_n \le v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ dans les notations de la proposition 1.IV.4. De plus, si $a = b$ alors u_n converge vers a d'après le théorème de l'encadrement. En effet, les deux suites (v_n) et (w_n) dans ce cas sont adjacentes.

Il reste à prouver l'implication réciproque. Soit $\lim_{n\to\infty} u_n = c \in \mathbb{R}$, et montrons alors $a = b = c$. Pour le faire, prenons $\varepsilon > 0$ et considérons un entier $N = N_\varepsilon$ tel que $|u_n - c| < \varepsilon$ chaque fois que $n \ge N$. Alors u_n appartient à l'intervalle $]c-\varepsilon, c+\varepsilon[$ donc $v_N \le c+\varepsilon$.

Puisque (v_n) est décroissante et tend vers b, nous avons alors $v_n \leq c+\varepsilon$ pour $n \geq N$ ce qui implique $b \leq c+\varepsilon$. De même, $a \geq c-\varepsilon$. Donc :

$$c-\varepsilon \leq a, \qquad b \leq c+\varepsilon.$$

Ceci étant valide quel que soit $\varepsilon > 0$, on en obtient $b \leq c \leq a$. Comme $a \leq b$, on a donc $a = b = c$. □

1.IV.B. Suites extraites. —

Définition 1.IV.6. — Soit (u_n) une suite numérique, et soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante. La suite $(u_{\varphi(n)})$ est appelée une *suite extraite*, ou sous suite, de la suite (u_n). On note souvent $n_k = \varphi(k)$ et $(u_{n_k}) = (u_{\varphi(k)})$.

Exemple 1.IV.7. — Soit (u_n) une suite numérique. Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) des termes paires ou impaires de (u_n) sont des suites extraites de (u_n). De même, la suite tronquée $(u_n)_{n\geq n_0}$, obtenue par $\varphi(n) = n_0 + n$ est une suite extraite de (u_n).

1.IV.B.1. Convergence d'une suite extraite. —

Proposition 1.IV.8. — *Si une suite numérique (u_n) converge vers $a \in \bar{\mathbb{R}}$, alors toute suite extraite de (u_n) converge vers a aussi.*

Démonstration. — Supposons $a \in \mathbb{R}$, le raisonnement pour $a = +\infty$ ou $a = -\infty$ étant analogue. Soit $\varepsilon > 0$ et N_ε tel que pour tout $n \geq N_\varepsilon$ on ait $|u_n - a| < \varepsilon$. Puisque φ est strictement croissante, on a $\varphi(n) \geq n$, donc $|u_{\varphi(n)} - a| < \varepsilon$. Ceci montre que $(u_{\varphi(n)})$ converge aussi vers a. □

1.IV.B.2. Plus petite et plus grande limite d'une suite extraite. —

Proposition 1.IV.9. — *Soit (u_n) une suite numérique et (u_{n_k}) une suite extraite. Alors :*

$$\liminf_{n\to\infty} u_n \leq \liminf_{k\to\infty} u_{n_k} \leq \limsup_{k\to\infty} u_{n_k} \leq \limsup_{n\to\infty} u_n.$$

Démonstration. — Pour tout réel x on considère les ensembles :

$$E(x) = \{n \in \mathbb{N} \mid u_n > x\},$$
$$F(x) = \{k \in \mathbb{N} \mid u_{n_k} > x\}.$$

Comme $(u_{n_k}) \subset (u_n)$, on a $F(x) \subset E(x)$. On considère aussi :

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \sharp E(x) = \infty\},$$
$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid \sharp F(x) = \infty\}.$$

Comme $F(x) \subset E(x)$, on a $\sharp F(x) \leq \sharp E(x)$, donc $B \subset A$.

Ainsi, A majoré implique B majoré, i.e. $\limsup_{n\to\infty} u_n < +\infty$ implique $\limsup_{k\to\infty} u_{n_k} < +\infty$. De même, $B \neq \emptyset$ implique $A \neq \emptyset$ donc $\limsup_{k\to\infty} u_{n_k} > -\infty$ implique $\limsup_{n\to\infty} u_n > +\infty$.

Enfin, si A et B sont majorés et non vides, on sait que :

$$\limsup_{n\to\infty} u_n = \sup(A),$$
$$\limsup_{k\to\infty} u_{n_k} = \sup(B),$$

d'après la preuve de la proposition 1.IV.1. Donc $B \subset A$ implique :

$$\limsup_{k\to\infty} u_{n_k} = \sup(B) \leq \sup(A) = \limsup_{n\to\infty} u_n.$$

La preuve pour la plus petite limite suit le même raisonnement. □

1.IV.C. Valeur d'adhérence. —

1.IV.C.1. Définition de valeur d'adhérence. —

Définition 1.IV.10. — Soit (u_n) une suite numérique et $a \in \mathbb{R}$. On dit que a est une *valeur d'adhérence* de (u_n) si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une nombre infini de valeurs de $n \in \mathbb{N}$ satisfaisant à :

$$|u_n - a| < \varepsilon.$$

Parfois, on dit que $+\infty$ est valeur d'adhérence de (u_n) si (u_n) n'est pas majorée. On dit que $-\infty$ est valeur d'adhérence de (u_n) si (u_n) n'est pas minorée.

Exemple 1.IV.11. — Soit $(u_n) = (-1)^n$. Alors la suite (u_{2n}) vaut constamment 1 tandis que (u_{2n+1}) vaut -1. Donc 1 et -1 sont valeurs d'adhérence de (u_n). Ce sont au fait les seules valeurs d'adhérence de cette suite.

Exemple 1.IV.12. — Plus généralement, étant donné $0 \neq m \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \cos\left(\frac{2n\pi}{m}\right).$$

Alors (u_n) admet $\lfloor m/2 \rfloor + 1$ valeurs d'adhérence :

$$\left\{\cos\left(\frac{2\pi k}{m}\right) \middle| 0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 1\right\}.$$

1.IV.C.2. Plus petite et plus grande limite comme valeurs d'adhérence. —

Proposition 1.IV.13. — *La plus grande limite et la plus petite limite sont valeurs d'adhérence.*

Démonstration. — Soit (u_n) la suite numérique en question. Si (u_n) n'est pas majorée, l'énoncé sur la limité supérieure est clair, de même pour la limite supérieure si (u_n) n'est pas minorée. Soit alors $b = \limsup_{n\to\infty} u_n$ et supposons (u_n) majorée, i. e. $b \in \mathbb{R}$. On note de nouveau, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$E(x) = \{n \in \mathbb{N} \mid u_n > x\}.$$

Soit alors $\varepsilon > 0$. On a :

$$\sharp E(b-\varepsilon) = \infty;$$
$$\sharp E(b + \tfrac{\varepsilon}{2}) < \infty.$$

On a donc un nombre infini de n dans $E(b-\varepsilon) \setminus E(b+\varepsilon/2)$, c'est-à-dire de n tels que :

$$b - \varepsilon < u_n \leq b + \frac{\varepsilon}{2} < b + \varepsilon.$$

Ceci montre que b est valeur d'adhérence de (u_n). Pour la limite inférieure, c'est le même argument. □

1.IV.C.3. Convergences d'une suite extraite et valeur d'adhérence. — Le résultat suivant établit l'équivalence entre l'idée de suite extraite et celle de valeur d'adhérence.

Théorème 1.IV.14. — *Pour que $b \in \bar{\mathbb{R}}$ soit valeur d'adhérence d'une suite numérique (u_n), il faut et il suffit qu'il y ait une suite extraite de (u_n) qui converge vers b.*

Démonstration. — Soit $b \in \mathbb{R}$, et supposons que la suite extraite u_{n_k} converge vers b. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K = K_\varepsilon$ tel que $k \geq K$ implique $|u_{n_k} - b| < \varepsilon$. Donc $|u_n - b| < \varepsilon$ pour une infinité de valeurs de n, i. e. pour n de la forme n_k, avec $k \geq K$.

Si (u_{n_k}) diverge vers $+\infty$ alors pour tout $b \in \mathbb{R}$ il existe $K = K_b$ tel que $u_{n_k} \geq b$ pour tous les $k \geq K$. Donc (u_n) n'est pas majorée. De même pour $b = -\infty$.

Montrons maintenant que, si $b \in \mathbb{R}$ est valeur d'adhérence de (u_n), on peut construire une suite extraite de (u_n) convergeant vers b. Prenons $0 \neq k \in \mathbb{N}$. Il existe alors une infinité de valeurs de n telles que :

$$|u_n - b| < \frac{1}{k}.$$

Nous prenons alors $n_0 = 0$, puis pour tout $k \geq 0$:

$$n_{k+1} = \min\left\{ n > n_k \,\middle|\, |u_n - b| < \frac{1}{k+1} \right\}.$$

Bien sûr ceci est bien défini car les n tels que $|u_n - b| < \frac{1}{k}$ sont en nombre infini, donc il en existe un plus grand que n_k.

Montrons alors que (u_{n_k}) converge vers b. En effet, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $K \geq 1$ tel que $\frac{1}{K} < \varepsilon$. Donc pour $k \geq K$, on a :

$$\left| u_{n_k} - b \right| < \frac{1}{k} \leq \frac{1}{K} < \varepsilon.$$

Si $b = +\infty$ est valeur d'adhérence de (u_n), alors (u_n) n'est pas majorée. Ainsi pour tout $K \in \mathbb{N}$ on a $u_n \geq K$ pour un nombre infini de valeurs de n. Donc on peut construire de nouveau (u_{n_k}) ayant $u_{n_k} \geq k$. Ainsi (u_{n_k}) tend vers $+\infty$. Le cas $b = -\infty$ suit le même raisonnement. □

Corollaire 1.IV.15. — *Soit (u_n) une suite numérique, a sa limite inférieure, b sa limite supérieure, c une valeur d'adhérence. Alors $a \leq c \leq b$. En particulier :*

$$a = \min\{c \in \mathbb{R} \mid c \text{ est valeur d'adhérence de } (u_n)\},$$
$$b = \max\{c \in \mathbb{R} \mid c \text{ est valeur d'adhérence de } (u_n)\}.$$

Démonstration. — Soit (u_{n_k}) une suite extraite qui converge vers c. Alors :

$$c = \lim_{k\to\infty} u_{n_k} = \limsup_{k\to\infty} u_{n_k} \leq \limsup_{n\to\infty} u_n = b.$$

Pour a, c'est le même raisonnement. □

1.IV.C.4. Théorème de Bolzano-Weierstrass. — Nous terminons ce chapitre par l'un des résultats les plus connus à propos des suites numériques bornées.

Théorème 1.IV.16. — *Toute suite réelle bornée admet une suite extraite convergente.*

Démonstration. — La limite supérieure est limite d'une suite extraite.

On peut donner une autre preuve. On construit la suite extraite $\varphi : k \mapsto \varphi(k) = n_k$ par dichotomie. Ceci se fait comme suit : on commence par noter $\varphi(0) = 0$, et considérer un minorant a de (u_n) et un majorant b de (u_n) de sorte que, pour tout entier n on ait :

$$a \leq u_n \leq b.$$

Donc $(u_n) \in I_0 = [a, b]$ pour tout n.

Ensuite, on pose $c = 1/2(a+b)$. On regarde les deux ensembles :

$$\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \leq c\},$$
$$\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \geq c\}.$$

Au moins un parmi deux ensembles est infini : on le note N_1 (si les deux le sont, on choisit le premier). On note en conséquence I_1 la moitié de l'intervalle I_0 contenant les u_n pour n appartenant à N_1. La longueur I_1 est bien évidemment la moitié de la longueur de I_0, c'est-à-dire $|a-b|/2$. On définit $\varphi(1)$ comme le plus petit $n > 0$ tel que $u_n \in I_1$.

On poursuit la démonstration en coupant I_1 à la moitié, et en définissant I_2 l'intervalle parmi les deux moitiés de I_1 qui contient un nombre infini de u_n; de même on pose $\varphi(2)$ comme le plus petit entier $n > \varphi(1)$ tel que $u_n \in I_2$. Cette procédure donne lieu à une suite I_k d'intervalles tels que $I_{k+1} \subset I_k$, avec I_k de longueur $|a-b|/2^k$ et à une suite extraite $(u_{n_k}) = (u_{\varphi(k)})$, avec $u_{n_k} \in I_k$.

Par le principe des intervalles emboîtés, il existe un unique réel $d \in \cap_{k\in\mathbb{N}} I_k$. On voit alors que $\lim_{k\to\infty} u_{n_k} = d$ puisque $u_{n_k} \in I_k$ pour tout k. □

CHAPITRE 2

SÉRIES NUMÉRIQUES

A partir d'ici, presque tout est tiré de [**LFA77**].

2.I. Convergence, critère de Cauchy

2.I.A. Convergence des séries numériques. —

Définition 2.I.1. — Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite numérique. La *somme partielle* à l'ordre n de la série numérique de terme général u_n est la suite (s_n) définie par :

$$s_n = u_0 + \cdots + u_n = \sum_{m\leq n} u_m.$$

On parle alors de la suite (s_n) comme de la *série de terme général* u_n, ou la *série* $\sum u_n$.

2.I.A.1. Convergence d'une série numérique. —

Définition 2.I.2. — On dit que la série numérique $\sum u_n$ *converge vers* $a \in \mathbb{R}$ si la suite (s_n) des sommes partielles converge vers a. Dans ce cas on note :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = a.$$

Si s_n n'a pas de limite, ou si $s_n \to \infty$, alors on dit que $\sum u_n$ diverge.

Exemple 2.I.3. — Considérons un gâteau dont on mangerait d'abord la moitié, puis la moitié de ce qui reste, et ainsi de suite à l'infini. La part que l'on aura mangée au bout de m pas est :

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n} = \frac{2^m - 1}{2^m}.$$

En effet, cette formule est valide pour $m = 1$, et pour $m \geq 2$ par récurrence on a :

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^m} + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^m} + \frac{2^{m-1} - 1}{2^{m-1}} = \frac{2^m - 1}{2^m}.$$

Donc pour $m \to \infty$, on obtient une limite qui vaut 1, i.e.:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Exemple 2.I.4. — Considérons la série de terme général u_n défini par :

$$u_0 = 0, \qquad \text{pour } n \geq 1: \quad u_n = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Nous avons la formule :

$$\sum_{n=0}^{m} u_n = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{m}{m+1}.$$

En effet, la formule est valide pour $m = 0$ et $m = 1$, puis par récurrence pour $m \geq 2$:

$$\sum_{n=0}^{m} u_n = \sum_{n=0}^{m-1} u_n + \frac{1}{m(m+1)} = \frac{m-1}{m} + \frac{1}{m(m+1)} = \frac{m}{m+1}.$$

La série $\sum u_n$ est donc convergente et :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Remarque 2.I.5. — La suite originaire (u_n) peut être récupérée de (s_n) par les relations $u_0 = s_0$ et $u_n = s_n - s_{n-1}$ pour $n \geq 1$. Donc, à proprement parler, la théorie des séries et celle des suites ne font qu'une seule et même chose.

Remarque 2.I.6. — La convergence d'une série numérique $\sum u_n$ ne dépend que du comportement de u_n *à partir d'un certain rang*, soit pour $n \geq n_0$.

2.I.A.2. Limite nulle du terme général d'une série convergente. —

Proposition 2.I.7. — *Si une série* $\sum u_n$ *converge, alors* $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Démonstration. — Soit $s_n = u_0 + \cdots + u_n$. Puisque $\sum u_n$ converge, la suite (s_n) converge, et il en est de même pour (s_{n+1}). De plus ces deux suites ont évidemment la même limite, c'est-à-dire $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$. Mais $u_n = s_{n+1} - s_n$ pour $n \geq 1$, donc u_n tend vers 0. □

Remarque 2.I.8. — La condition $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. n'est pas suffisante pour que $\sum u_n$ converge. Par exemple, posons :

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

D'après la relation $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = 1$, on voit :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}},$$

donc $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Cependant :

$$u_0 + \cdots + u_n = \sqrt{n+1},$$

donc $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = +\infty$.

2.I.A.3. Exemple clé : la série géométrique. —

Définition 2.I.9. — La série géométrique de terme initial $u_0 \in \mathbb{R}$ et de ratio $q \in \mathbb{R}$ est la série de terme général $u_n = u_0 q^n$.

Si $q = 1$ le terme généeal de la série géométrique est constant et la série diverge de façon évidente dès que $u_0 \neq 0$. Lorsque $q \neq 1$, la somme partielle s_n de la série géométrique de terme initial u_0 et de ratio q est :

$$s_n = u_0 + \cdots + u_n = u_0 + \cdots + u_0 q^n = u_0(1 + \cdots + q^n) = u_0 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}. \tag{3}$$

Proposition 2.I.10. — *La série géométrique de terme initial* $0 \neq u_0 \in \mathbb{R}$ *et de ratio* $q \in \mathbb{R}$*:*

i) converge vers $\frac{u_0}{1-q}$ *si* $|q| < 1$*;*

ii) diverge si $|q| \geq 1$.

Démonstration. — D'après (3), on voit que la somme partielle s_n de notre série géométrique satisfait $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{u_0}{1-q}$ si $|q| < 1$. Si $|q| > 1$, de nouveau (3) indique que la série géométrique diverge. En effet, la suite extraite s_{2n+1} tend vers $+\infty$.

Le cas $q = 1$ est évident. Si $q = -1$, la somme partielle s_n de la série géométrique est égale à u_0 si n est pair, et à 0 si n est impair. Donc s_n n'a pas de limite. □

2.I.B. Critère de Cauchy. —

***Proposition 2.I.11* (Critère de Caucy).** — *La série numérique* $\sum u_n$ *converge si et seulement si, pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* N_ε *tel que, pour tout* $n \geq N_\varepsilon$ *et tout entier* p *on ait :*

$$\left| u_{n+1} + \cdots + u_{n+p} \right| < \varepsilon.$$

Démonstration. — C'est une application immédiate du théorème 1.III.5. En effet, la différence entre la somme partielle au rang $n + p$ et celle au rang n vaut, en valeur absolue, précisément $\left|\sum_{i=n+1}^{n+p} u_i\right|$. □

Exemple 2.I.12. — On considère la série harmonique :

$$\sum_n \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Utilisons Cauchy pour montrer que cette série diverge. Notons $u_n = 1/n$. Supposons par l'absurde qu'elle soit convergente et soit $\varepsilon < 1/2$. Fixons N et $n \geq N$ donc $2n \geq N$. On a :

$$|u_{n+1} + \cdots + u_{2n}| = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \geq \varepsilon.$$

2.I.C. Opérations sur les séries. — La proposition suivante munit l'ensemble des séries convergentes d'une structure d'espace vectoriel. Attention le produit est plus délicat.

Proposition 2.I.13. — *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries, avec $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = a \in \mathbb{R}$. Alors :*

i) si $\sum v_n$ converge et sa somme vaut b alors $\sum(u_n + v_n)$ converge et sa somme vaut $a + b$;

ii) si $\sum v_n$ diverge alors $\sum(u_n + v_n)$ diverge;

iii) pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\sum \lambda u_n$ converge vers λa.

La preuve est évidente.

2.II. Séries à termes positifs

Le résultat suivant est évident mais important.

Proposition 2.II.1. — *Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée.*

Démonstration. — La série converge si et seulement si la suite des sommes partielles est convergente, par définition. Mais celle-ci est une suite croissante (car $u_n \geq 0$), elle est donc convergente si et seulement si elle est majorée. □

2.II.A. Comparaison de séries. —

2.II.A.1. Comparaison par inégalité. —

Proposition 2.II.2. — *Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs avec $u_n \leq v_n$, $\forall n$.*

i) Si $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ converge aussi et :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} v_n.$$

ii) Si $\sum u_n$ diverge, v_n diverge aussi.

Démonstration. — Notons s_n la somme partielle $\sum_{m \leq n} u_m$ et $t_n = \sum_{m \leq n} v_m$. Comme (u_n) est à termes positifs, (s_n) est croissante, donc convergente à partir du moment que (s_n) est bornée. Puisque $u_m \leq v_m$, on a pour tout n, $s_n \leq t_n$. Mais (t_n) converge, elle est donc bornée : (s_n) est ainsi bornée. De plus, la limite de (s_n) vaut au plus la limite de (t_n), d'après le théorème de comparaison pour les suites numériques. Par contraposée, on en déduit que, si $\sum u_n$ diverge, $\sum v_n$ diverge. □

Remarque 2.II.3. — Dans la proposition précédente, si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, la convergence de $\sum v_n$ entraîne aussi celle de $\sum u_n$, mais sans l'inégalité des sommes. L'énoncé (ii) reste valide.

2.II.A.2. Comparaison par équivalence. —

Proposition 2.II.4. — *Soit (u_n) et (v_n) suites numériques positives équivalentes. Alors les séries de termes généraux u_n et v_n sont de même nature.*

Démonstration. — Bien sûr il suffit considérer les séries à partir d'un certain rang, autrement dit on peut modifier arbitrairement les premiers termes des séries en question sans perte de généralité. Soit (λ_n) convergente vers 1 avec $u_n = (\lambda_n)v_n$ à partir d'un certain rang : nous pouvons supposer que ce rang soit 0 quitte à modifier les premiers termes. Ceci équivaut à dire que, pour tout $\varepsilon > 0$ on a, quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $|\lambda_n - 1| < \varepsilon$, ce qui implique :

$$(1-\varepsilon)v_n \leq u_n \leq (1+\varepsilon)v_n.$$

De $u_n \leq (1+\varepsilon)v_n$ on déduit que, si $\sum v_n$ converge, d'après la proposition 2.II.2, $\sum u_n$ converge aussi.

On peut supposer $\varepsilon < 1$, donc de $(1-\varepsilon)v_n \leq u_n$ on déduit que, si $\sum u_n$ converge, alors $\sum(1-\varepsilon)v_n$ converge; il en est alors de même pour $\sum v_n$. □

Remarque 2.II.5. — On peut aussi dire que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ à termes positifs ont même nature si $\frac{u_n}{v_n}$ est défini à partir d'un certain rang et tend vers $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si en revanche cette limite est 0, alors la convergence de $\sum v_n$ entraîne celle de $\sum u_n$.

Exemple 2.II.6. — Le terme général de la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est équivalent à $\frac{1}{n(n+1)}$, et cette série est convergente. Donc $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente aussi.

2.II.B. Série de Riemann. — Étant donnés un réel $b > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit :

$$b^\alpha = e^{\alpha \ln(b)}.$$

Cette formule est cohérente si l'on prend l'exponentielle de :

$$\ln(b^\alpha) = \alpha \ln(b).$$

Ceci s'étend évidemment à $b = 0$ auquel cas $b^\alpha = 0$, sauf pour $0^0 = 1$.

Définition 2.II.7. — Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La *série de Riemann* d'exposant α est :

$$\sum_n \frac{1}{n^\alpha}.$$

Si $\alpha = 1$, nous avons appelé la série de Riemann *série harmonique*. Il s'agit d'une série divergente.

Théorème 2.II.8. — *La série de Riemann $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.*

Démonstration. — Nous avons déjà vu lors des exemples 2.I.12 et 2.II.6 que la série de Riemann est divergente pour $\alpha = 1$, donc pour tout $\alpha \leq 1$, et convergente pour $\alpha = 2$, donc pour tout $\alpha \geq 2$. Passons donc à étudier la région $1 < \alpha < 2$.

On définit la série $\sum_{n\geq 1} v_n$ de terme général :

$$v_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}.$$

Il s'agit d'une série à termes positifs, i. e. on a $v_n \geq 0$. Ceci est clair puisque la suite $(\frac{1}{n^{\alpha-1}})$ est évidemment décroissante pour $\alpha > 1$.

Maintenant on considère la fonction de variable réelle :

$$f(x) = \frac{1}{x^{\alpha-1}},$$

définie et strictement décroissante (toujours pour $\alpha > 1$) sur la demi droite $]0, +\infty[$. Sa dérivée première vaut :

$$f'(x) = \frac{1-\alpha}{x^{\alpha}},$$

On applique le théorème des accroissements finis sur chaque intervalle $[n, n+1]$ à la fonction f. On trouve alors, pour tout n, un nombre réel $x_n \in]n, n+1[$ tel que :

$$f'(x_n) = \frac{f(n+1) - f(n)}{n+1-n},$$

donc :

$$\frac{1-\alpha}{x_n^{\alpha}} = \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} = -v_n.$$

Puisque $x_n \in]n, n+1[$, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = 1.$$

On a alors, en posant $u_n = \frac{1}{n^{\alpha}}$, la limite :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n^{\alpha} v_n} = \alpha - 1.$$

Ainsi la convergence de $\sum u_n$ et celle de $\sum v_n$ sont équivalentes pour $\alpha > 1$.

D'autre part, $\sum v_n$ est convergente, car :

$$\begin{aligned} v_1 + \cdots + v_n &= \left(1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}\right) + \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}} - \frac{1}{3^{\alpha-1}}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right) = \\ &= 1 - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}, \end{aligned}$$

ce qui tend vers 1 lorsque n tend vers ∞. □

On verra que l'on peut définir b^{α} même si $\alpha \in \mathbb{C}$, et que la série de Riemann d'exposant $\alpha \in \mathbb{C}$ converge si et seulement si $\Re(\alpha) > 1$.

2.II.C. Règles de convergence. — Nous allons établir deux règles classiques de convergence des séries positives : la règle de Cauchy et celle de d'Alembert. Les deux portent sur une limite du terme général u_n d'une série positive : l'une sur sa racine n-ième, l'autre sur son rapport avec u_{n+1}, et permettent de conclure si cette limite est plus grande ou plus petite que 1. Si cette limite vaut 1, on ne retire aucune information de ces deux règles.

2.II.C.1. Règle de Cauchy. —

***Proposition 2.II.9* (Règle de Cauchy).** — *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs et soit :*

$$b = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} \in [0, +\infty].$$

1. *Si $b < 1$, alors $\sum u_n$ converge.*
2. *Si $b > 1$, alors $\sum u_n$ diverge.*

Démonstration. — Supposons $b > 1$. Alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $1 < c < b$. Donc il existe un nombre infini de valeurs de n telles que :

$$\sqrt[n]{u_n} > c,$$

et donc :

$$u_n > c^n.$$

Il est donc clair que (u_n) n'est pas bornée (donc ne converge pas vers 0), ainsi $\sum u_n$ diverge d'après la proposition 2.I.7.

Par contre si $b < 1$, alors il existe $d \in \mathbb{R}$ tel que $b < d < 1$. Donc l'ensemble des entiers n tels que $\sqrt[n]{u_n} > d$ est fini. Ainsi, il existe un certain rang N tel que :

$$n \geq N \Rightarrow u_n \leq d^n.$$

La convergence de la série $\sum u_n$ est alors assurée par la convergence de la série géométrique $\sum d^n$, d'après les propositions 2.I.10 et 2.II.2. □

2.II.C.2. Règle de d'Alembert. —

***Proposition 2.II.10* (Règle de d'Alembert).** — *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, et supposons $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang. Soit :*

$$a = \liminf_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n},$$
$$b = \limsup_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

1. *Si $b < 1$, alors $\sum u_n$ converge.*
2. *Si $a > 1$, alors $\sum u_n$ diverge.*

On ne peut pas conclure si $(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ n'a pas de limite, ou si $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

Démonstration. — On peut supposer sans modification essentielle de l'énoncé que $u_n \neq 0$ quel que soit n.

Supposons $b < 1$ et soit $d \in \mathbb{R}$ avec $b < d < 1$. D'après la définition de la limite supérieure, cf. proposition 1.IV.1, le nombre de valeurs de n telles que $\frac{u_{n+1}}{u_n} > d$ est alors fini. Donc il existe un rang N tel que, pour tout $n \geq N$, on aura :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq d.$$

Ainsi, pour $p \geq 0$ on aura :

$$\frac{u_{N+p}}{u_N} = \frac{u_{N+p}}{u_{N+p-1}} \frac{u_{N+p-1}}{u_N} \leq d \frac{u_{N+p-1}}{u_N} \leq d \frac{u_{N+p-1}}{u_{N+p-2}} \frac{u_{N+p-2}}{u_N} \leq d^2 \frac{u_{N+p-2}}{u_N} \leq \cdots \leq d^p.$$

On a alors :

$$u_{N+p} \leq d^p u_N,$$

donc $\sum u_n$ converge d'après la proposition 2.II.2, car elle est majorée, à partir d'un certain rang, par une suite géométrique convergence, cf. proposition 2.I.10.

Sinon, supposons $a > 1$. Il existe alors un réel c tel que $1 < c < a$. Donc il existe seulement un nombre fini de valeurs de n telles que $\frac{u_{n+1}}{u_n} < c$, i. e. $u_{n+1} \geq c\, u_n$ à partir d'un certain rang, disons N. Ainsi pour $p \geq 0$ on a

$$u_{p+N} \geq c^p u_N,$$

ainsi u_n ne tend pas vers 0 donc $\sum u_n$ diverge. □

Exemple 2.II.11. — Étudier la série de terme général $u_n = (\frac{2n+1}{3n+5})^{n/2}$. Cette série est bien sûr à termes positifs, et on a :

$$\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\frac{2n+1}{3n+5}^{n/2}} = \sqrt{\frac{2n+1}{3n+5}},$$

ce qui tend vers $\sqrt{2/3} < 1$, donc la série $\sum u_n$ converge par la règle de Cauchy.

Exemple 2.II.12. — Étudier la série (positive) de terme général $u_n = \frac{n!}{n^n}$. On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

Cette suite tend vers $\frac{1}{e} < 1$, donc $\sum u_n$ est convergente par la règle de d'Alembert.

2.II.D. Produit de séries positives. —

Théorème 2.II.13. — *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ séries positives convergentes et posons :*

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

Alors $\sum w_n$ est convergente et :

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right).$$

Démonstration. — On écrit w_n sous la forme :

$$w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q.$$

Donc la somme partielle de la série $\sum w_n$ est :

$$\sum_{k=0}^{n} w_k = \sum_{0 \leq p+q \leq n} u_p v_q.$$

Notons s_n et t_n les sommes partielles au rang n de $\sum u_n$ et $\sum v_n$. On a :

$$s_n t_n = \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{n} u_p v_q.$$

Si $p+q \leq n$, alors $p \leq n$ et $q \leq n$. Par ailleurs $p \leq n$ et $q \leq n$ impliquent $p+q \leq 2n$. Il est alors clair que :

$$\sum_{k=0}^{n} w_k \leq s_n t_n \leq \sum_{k=0}^{2n} w_k.$$

De ces inégalités on déduit que $\sum w_n$ est bornée donc convergente, et que la somme de la série $\sum w_n$ converge vers $\lim_{n\to\infty} s_n t_n$, c'est-à-dire vers le produit $\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right)$. □

Remarque 2.II.14. — Attention le résultat est faux pour séries à termes de signe variable, comme on verra dans l'exemple 2.III.11.

2.III. Séries à termes de signe quelconque

Nous allons voir que, lorsque le signe du terme général n'est pas déterminé à priori, la convergence d'une série devient un sujet beaucoup plus délicat.

2.III.A. Convergence absolue et convergence simple. — Le premier système pour établir la convergence d'une série quelconque est de se ramener au cas des séries à termes positifs.

Définition 2.III.1. — On dit que la série $\sum u_n$ *converge absolument* si $\sum |u_n|$ converge.

Proposition 2.III.2. — *Une série $\sum u_n$ absolument convergente converge. De plus :*

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|.$$

Démonstration. — Posons :

$$s_n = \sum_{m \leq n} u_n, \qquad t_n = \sum_{m \leq n} |u_n|.$$

Étant donnés $n, p \in \mathbb{N}$, on a, par l'inégalité triangulaire :

$$|s_{n+p} - s_n| = \left|u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}\right| \leq |u_{n+1}| + \cdots + \left|u_{n+p}\right| = t_{n+p} - t_n.$$

La suite (t_n) converge, donc elle est de Cauchy d'après le théorème 1.III.5 du chapitre 1. D'après l'inégalité précédente, ceci implique que (s_n) est aussi de Cauchy, donc convergente de nouveau d'après théorème 1.III.5 du chapitre 1. La série $\sum u_n$ est donc convergente, et d'après l'inégalité triangulaire on a bien sûr $|s_n| \leq t_n$, donc :

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|.$$

□

Remarque 2.III.3. — Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ série numériques absolument convergentes et posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \sum_{k=0}^n u_n v_{n-k}$. Alors $\sum w_n$ est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right).$$

Démonstration. — Nous avons vu que $\sum w_n$ converge absolument, du moment que $\sum |u_n|$ et $\sum |v_n|$ convergent. Nous savons aussi que :

Remarque 2.III.4. — Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ série numériques absolument convergentes et posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \sum_{k=0}^n u_n v_{n-k}$. Alors $\sum w_n$ est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{\infty} |w_n| = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} |v_n|\right).$$

Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_ε tel que, $n \geq n_\varepsilon$ implique :

$$\left|\sum_{k=0}^{n} |w_k| - \left(\sum_{i=0}^{n} |u_i|\right)\left(\sum_{j=0}^{n} |v_j|\right)\right| < \varepsilon.$$

Mais nous avons :

$$\left|\sum_{k=0}^{n} w_k - \left(\sum_{i=0}^{n} u_i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} v_j\right)\right| \leq \left|\sum_{k=0}^{n} |w_k| - \left(\sum_{i=0}^{n} |u_i|\right)\left(\sum_{j=0}^{n} |v_j|\right)\right|,$$

donc l'énoncé est démontré.

□

2.III.B. Série alternées. —

Définition 2.III.5. — Une série $\sum u_n$ est *alternée* si elle est de la forme :

$$\sum (-1)^n u_n,$$

avec u_n de signe constant.

Théorème 2.III.6. — *Une série alternée $\sum (-1)^n u_n$, telle que la suite (u_n) est positive décroissante vers* 0, *est convergente.*

Lemme 2.III.7. — *Soit (x_n) une suite numérique et supposonts que :*

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = a \in \mathbb{R}$$

Alors $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Démonstration. — Soit un $\varepsilon > 0$. Il existe n_1 et n_2 naturels tels que :

$$n \geq n_1 \Rightarrow |x_{2n+1} - a| < \varepsilon,$$
$$n \geq n_1 \Rightarrow |x_{2n} - a| < \varepsilon.$$

Donc soit $n_0 = \max(2n_1 + 1, 2n_2)$ et $m \geq n_0$. Si m est pair donc $m = 2n$ on a $2n \geq n_0 \geq 2n_2$ i. e. $n \geq n_2$ donc $|x_m - a| = |x_{2n} - a| < \varepsilon$. Par contre si m est impair donc $m = 2n + 1$ alors

$2n+1 \geq n_0 \geq 2n_1+1$ implique $n \geq n_1$ donc $|u_m - a| = |x_{2n+1} - a| < \varepsilon$. Dans tous les cas $|x_m - a| < \varepsilon$ donc (x_m) converge vers a.

□

Démonstration du théorème 2.III.6. — Nous considérons la somme partielle $U_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$ et ses termes pair $v_n = U_{2n}$ et impairs $w_n = U_{2n+1}$. On a, quel que soit $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} &w_n \geq w_{n-1}, && \text{donc } (w_n) \text{ est croissante,} \\ &v_n \leq v_{n-1}, && \text{donc } (v_n) \text{ est décroissante,} \\ &w_n \leq v_n. && \end{aligned}$$

En effet $w_n - w_{n-1} = -u_{2n+1} + u_{2n} \geq 0$ et $v_n - v_{n-1} = u_{2n} - u_{2n-1} \leq 0$ car (u_n) est décroissante et $w_n - v_n = -u_{2n+1} \leq 0$ puisque (u_n) est positive. De plus $w_n - v_n = -u_{2n+1}$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, par hypothèse. Autrement dit, (w_n) et (v_n) sont adjacentes, ainsi elles convergent vers la même limite a.

Les termes pairs et impairs de U_n convergent vers a. Pour conclure, on utilise le lemme précédent qui affirme que, si les termes pairs et impairs d'une suite $(x_n) = (U_n)$ convergent vers a alors la suite elle-même converge vers a.

□

Définition 2.III.8. — Une série numérique est *semiconvergente* si elle est convergente mais pas absolument convergente.

Exemple 2.III.9. — La série harmonique alternée :

$$\sum (-1)^n \frac{1}{n}$$

est semiconvergente. En effet, nous avons vu lors de l'exemple 2.I.12 qu'elle n'est pas convergente, et par application du théorème 2.III.6, cette série est clairement convergente.

Exemple 2.III.10. — Considérons :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}.$$

Nous allons montrer $\sum u_n$ est divergente, ceci étant dû au fait que u_n n'est pas une série alternée, autrement dit $\frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ n'est pas décroissante. Pour montrer que $\sum u_n$ diverge, nous pouvons la comparer à la série

$$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}},$$

convergente d'après le théorème 2.III.6. La différence est :

$$\begin{aligned} w_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - u_n &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \\ &= (-1)^n \frac{(\sqrt{n} + (-1)^n) - \sqrt{n}}{\sqrt{n}(\sqrt{n} + (-1)^n)} = \frac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}}, \end{aligned}$$

ce qui donne une série à termes positifs, de terme général équivalent à n pour $n \to \infty$, donc une série divergente.

Remarquons que ceci offre un exemple de deux séries, à termes de signe non constant, qui sont équivalentes, et pourtant pas de même nature :

$$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \qquad \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}.$$

Exemple 2.III.11. — Prenons :

$$u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}.$$

Nous avons alors la série produit :

$$w_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n+1-k)}}.$$

Or la fonction $f : y \mapsto (y+1)(n+1-y)$ définie sur $\mathbb{R}$ admet un maximum en $y = n/2$, ce que l'on voit facilement en prenant la dérivée première de f. Ainsi $f(y) \leq f(n/2) = (\frac{n}{2}+1)^2$. En passant au dénominateur et en prenant la racine on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n+1-k)}} \geq \frac{n+1}{n/2+1}.$$

Cette quantité ne converge pas vers 0 lorsque n tend vers l'infini, donc $\sum w_n$ diverge.

2.III.C. Développements limités. — Un système pour établir la convergence d'une série est d'effectuer un développement limité autour de 0 en termes de $1/n$.

Exemple 2.III.12. — Soit $\alpha > 0$ un réel et :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}.$$

Nous avons alors :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}}.$$

On définit alors :

$$f(x) = \frac{1}{1+x},$$

et on se sert du développement limité de f autour de 0:

$$f(x) = 1 - x(1+\eta(x)),$$

avec $\lim_{x\to 0} \eta(x) = 0$. En posant $x = (-1)^n/n^\alpha$, on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n} &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\left(1 - \frac{(-1)^n}{n^\alpha}(1+\xi(n))\right) = \\ &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{n^{2\alpha}}(1+\xi(n)), \end{aligned}$$

où $\xi(n) = \eta\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Soit alors :

$$v_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}, \qquad w_n = \frac{1+\xi(n)}{n^{2\alpha}}.$$

On a $\sum v_n$ convergente d'après le critère des séries alternées. De plus, $w_n \geq 0$ à partir d'un certain rang, car $\xi(n)$ tend vers 0. Pour la même raison, (w_n) est équivalent à $(1/n^{2\alpha})$. Ceci montre que $\sum w_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1/2$, donc que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1/2$.

2.IV. Sommations par paquets, changements d'ordre

2.IV.A. Groupement des termes d'une série. — Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante, et soir $\sum u_n$ une série numérique. On considère alors la suite (v_n) définie de la manière suivante :

$$v_0 = \sum_{k=0}^{\varphi(0)} u_k, \qquad v_n = \sum_{k=1+\varphi(n-1)}^{\varphi(n)} u_k, \quad \text{pour } n \geq 1. \tag{4}$$

La série $\sum v_n$ correspond à une somme par blocs des termes u_n, l'intervalle des indices intervenant dans chaque bloc étant fixé par φ.

Proposition 2.IV.1. — *Soit* $\sum u_n$ *une série numérique,* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *une fonction strictement croissante, et définissons la série* $\sum v_n$ *comme dans* (4).

i) Si la série $\sum u_n$ *converge, alors* $\sum v_n$ *converge et :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} v_n.$$

ii) Si $u_n \geq 0$ *pour tout* n*, et* $\sum v_n$ *converge, alors* $\sum u_n$ *converge.*

Démonstration. — On note s_n la somme $u_0 + \cdots + u_n$. On a :

$$v_0 + \cdots + v_n = u_0 + \cdots + u_{\varphi(n)} = s_{\varphi(n)}.$$

Donc si (s_n) converge, la suite extraite $(s_{\varphi(n)})$ converge aussi vers la même limite. Ceci démontre (i).

Pour montrer (ii), on remarque que pour tout n on a $n \leq \varphi(n)$, sans quoi φ ne saurait être strictement croissante. Donc, comme les u_n sont réels non négatifs, on a $s_n \leq s_{\varphi(n)}$. Or si $(s_{\varphi(n)})$ converge, forcément $(s_{\varphi(n)})$ est bornée, donc (s_n) aussi. Par suite (s_n) converge, et (ii) est prouvé. □

Remarque 2.IV.2. — Si $\sum u_n$ est divergente de signe non constant, il peut arriver que $\sum v_n$ soit convergente. Un exemple tout simple est $u_n = (-1)^n$. Évidemment, si on groupe les termes u_n deux par deux (donc par $\varphi(n) = 2n$), on obtient $v_n = 0$.

2.IV.B. Changement de l'ordre des termes d'une série. — Soit σ une permutation de $\mathbb{N}$, c'est-à-dire une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Étant donnée une série numérique $\sum u_n$, on considère la série $\sum u_{\sigma(n)}$, obtenue par changement de l'ordre des termes de $\sum u_n$ suivant la permutation σ.

Définition 2.IV.3. — On dit que u_n est *commutativement convergente* si, pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est convergente.

Théorème 2.IV.4. — *Une série numérique $\sum u_n$ est commutativement convergente si et seulement si elle converge absolument. Dans ce cas, pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$ on a :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)}.$$

Démonstration. — Nous montrons d'abord que, si $\sum u_n$ est absolument convergente, alors quel que soit σ la permutation de $\mathbb{N}$ choisie, la série de terme général $v_n = u_{\sigma(n)}$ est absolument convergente. Pour le faire, on définit pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mu(n) = \max_{k \le n} \sigma(k).$$

Donc $\mu(n)$ indique la plus grande valeur atteinte par $\sigma(k)$ lorsque k est dans $[0, n]$. En particulier $\mu(n) \ge n$, puisque σ est une bijection. Donc $\lim_{n\to\infty} \mu(n) = +\infty$. On pose :

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|.$$

Ensuite nous remarquons :

$$|v_0| + \cdots + |v_n| = |u_{\sigma(0)}| + \cdots + |u_{\sigma(n)}| \le |u_0| + \cdots + |u_{\mu(n)}| \le a.$$

Donc la suite des sommes partielles $|v_0| + \cdots + |v_n|$ est bornée par a, et (v_n) est absolument convergente. Il s'ensuit aussi que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |v_n| \le a.$$

En utilisant σ^{-1}, on montre l'inégalité inverse. On en déduit l'égalité entre a et la somme de la série $\sum |v_n|$.

Maintenant on montre que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont la même somme. Pour le faire on définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble :

$$\Delta_n = \{0, \dots, \mu(n)\} \setminus \{\sigma(0), \dots, \sigma(n)\}.$$

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left| \sum_{k=0}^{\mu(n)} u_k - \sum_{k=0}^{n} v_k \right| = \left| \sum_{k \in \Delta_n} u_k \right| \le \sum_{k \in \Delta_n} |u_k| = \sum_{k=0}^{\mu(n)} |u_k| - \sum_{k=0}^{n} |v_k|.$$

Puisque $\lim_{n\to\infty} \mu(n) = +\infty$, et $\sum_{k=0}^{\infty} |u_k| = \sum_{k=0}^{\infty} |v_k|$, nous déduisons par passage à la limite dans l'inégalité précédente :

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \sum_{k=0}^{\infty} v_k.$$

Il reste à démontrer que, si la série $\sum u_n$ est commutativement convergente, alors elle est absolument convergente. Par contraposée, on peut montrer que, si $\sum u_n$ est semiconvergente, alors l'on peut trouver une permutation σ de $\mathbb{N}$ telle que la série v_n de terme général $u_{\sigma(n)}$ est divergente. Nous définissons alors :

$$u_n^+ = \max(u_n, 0), \qquad u_n^- = -\min(u_n, 0).$$

Remarquons que $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$, et puisque $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente, au moins l'une des séries positives $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ doit être divergente. En fait $u_n = u_n^+ - u_n^-$ et $\sum u_n$ converge, donc $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont toutes deux divergentes du moment qu'une d'elles diverge. Nous avons donc $\sum_{n=0}^{\infty} u_n^+ = +\infty$.

Définissons aussi les applications strictement croissantes $\varphi, \psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ suivantes :

$$\begin{aligned} &\varphi(0) = \min\{k \geq 0 \mid u_k > 0\}, \qquad \text{pour } n \geq 1: \quad \varphi(n) = \min\{k > \varphi(n-1) \mid u_k > 0\}, \\ &\psi(0) = \min\{k \geq 0 \mid u_k \leq 0\}, \qquad \text{pour } n \geq 1: \quad \psi(n) = \min\{k > \psi(n-1) \mid u_k \leq 0\}. \end{aligned}$$

Finalement, nous définissons les suites (z_n) et (w_n) par :

$$z_n = u_{\varphi(n)}, \qquad w_n = u_{\psi(n)},$$

donc (z_n) est la suite des u_n positifs, tandis que (w_n) est la suite des u_n négatifs ou nuls. Puisque $\sum u_n^+$ diverge, $\sum z_n$ diverge aussi, en effet (z_n) est obtenue en supprimant les termes nuls de (u_n^+).

Maintenant, puisque $\sum z_n$ diverge, il existe un entier n tel que :

$$z_0 + \cdots + z_n \geq w_0.$$

Nous posons n_0 pour le plus petit parmi ces entiers. L'entier n_1 est le plus petit entier $m > n_0$ satisfaisant :

$$z_0 + \cdots + z_m \geq 1 + w_0 + w_1.$$

On suit ce procédé en définissant n_k comme le plus petit entier $m > n_{k-1}$ tel que :

$$z_0 + \cdots + z_m \geq k + w_0 + \cdots + w_k, \tag{5}$$

l'existence de tous les entiers (n_k) étant assurée par la divergence de $\sum z_n$. Définissons la suite :

$$(y_m) = z_0, \ldots, z_{n_0}, -w_0, z_{n_0+1}, \ldots, z_{n_1}, -w_1, \ldots$$

Nous avons alors, d'après (5):

$$\sum_{m=0}^{k+n_k} y_m = \sum_{j=0}^{n_k} z_j - \sum_{i=0}^{k} w_i \geq k.$$

Ceci implique que $\sum y_m$ diverge. Par ailleurs, la série $\sum y_m$ s'obtient en réordonnant les termes de $\sum u_n$. Ceci termine la preuve. □

2.IV.C. Transformée d'Abel. — La transformée d'Abel est un outil puissant, qui généralise le théorème de convergence des séries alternées. La transformée d'Abel peut être utilisée pour des séries réelles et complexes (nous énonçons ici seulement le premier cas).

Théorème 2.IV.5. — *Soit $\sum u_n$ une série numérique. Si on a $u_n = a_n b_n$ de sorte que :*

— *la suite (b_n) soit positive et décroissante vers 0;*

— *il existe M tel que $|\sum_{k\leq n} a_k| \leq M$ pour tout n.*

Alors $\sum u_n$ est convergente.

Démonstration. — Pour la démonstration, nous regroupons (la *transformée* d'Abel proprement dite) les termes de la somme partielle $U_n = u_0 + \cdots + u_n$ de sorte à faire apparaître les différences $b'_n = b_{n+1} - b_n$. On note $A_n = a_0 + \cdots + a_n$. Il faut penser à la formule de l'intégrale par parties $\int ab = Ab - \int Ab'$ où $A = \int a$ est une primitive de a, en échangeant $\int$ et $\sum$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons la relation :

$$U_n = A_n b_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b'_k. \tag{6}$$

Pour la démontrer, faisons une récurrence sur n. Pour $n = 0$, les deux termes valent $a_0 b_0$ car $A_{-1} = 0$. Supposons alors la relation valide au rang n et montrons la au rang $n+1$:

$$\begin{aligned} U_{n+1} = U_n + a_{n+1} b_{n+1} = A_n b_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b'_k + a_{n+1} b_{n+1} = \\ = A_n b_n - \sum_{k=0}^{n} A_k b'_k + A_n b'_n + a_{n+1} b_{n+1} = \\ = A_n b_n - \sum_{k=0}^{n} A_k b'_k + A_n (b_{n+1} - b_n) + a_{n+1} b_{n+1} = \\ = A_n b_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} A_k b'_k + a_{n+1} b_{n+1} = \\ = (A_n + a_{n+1}) b_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} A_k b'_k = A_{n+1} b_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} A_k b'_k. \end{aligned}$$

Or, (A_n) étant bornée et (b_n) convergeant vers 0, on voit que la limite de U_n existe finie, lorsque n tend vers l'infini, si et seulement si $\sum A_n b'_n$ converge. Mais $\sum A_n b'_n$ est même absolument convergente, en effet :

$$|A_n b'_n| \leq M |b_n - b_{n+1}| = M(b_n - b_{n+1}),$$

puisque (b_n) est décroissante. De plus $\sum (b_n - b_{n+1})$ est convergente, car sa somme partielle au rang m vaut :

$$(b_0 - b_1) + (b_1 - b_2) + \cdots + (b_m - b_{m+1}) = b_0 - b_{m+1},$$

ce qui tend vers b_0 lorsque m tend vers ∞. Par la proposition 2.II.2, $\sum A_n b'_n$ est donc absolument convergente. $\square$

CHAPITRE 3

SÉRIES ENTIÈRES

3.I. Suites et séries complexes

3.I.A. Suites à valeurs complexes. —

3.I.A.1. Voisinage dans le plan complexe. —

Définition 3.I.1. — Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $\delta > 0$. Un *disque ouvert* est la partie de $\mathbb{C}$:

$$D(z_0, \delta) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \delta\}.$$

Un *disque fermé* est :

$$\bar{D}(z_0, \delta) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq \delta\}.$$

Le cercle centré en z_0 et de rayon δ est :

$$C(z_0, \delta) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = \delta\}.$$

Pour les disques et le cercle centrés en 0, nous abrégerons :

$$D(\delta) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \delta\},$$
$$\bar{D}(\delta) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \delta\},$$
$$C(\delta) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \delta\}.$$

Le *disque épointé* $D^*(\zeta_0, \delta)$ est $D(\zeta_0, \delta) \setminus \{\zeta_0\}$.

3.I.A.2. Convergence des suites complexes. —

Définition 3.I.2. — Soit (z_n) une suite de nombres complexes. On dit que la suite (z_n) *converge* vers $w \in \mathbb{C}$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N_ε tel que, si $n \geq N_\varepsilon$, alors :

$$|z_n - w| < \varepsilon.$$

Remarque 3.I.3. — La suite (z_n) tend vers w si et seulement si $z_n - w$ tend vers 0. Ceci arrive si et seulement si la suite de nombre réels $(|z_n - w|)$ tend vers 0. Une condition encore équivalente est :

$$\lim_{n\to\infty} \Re(z_w) = \Re w,$$
$$\lim_{n\to\infty} \Im(z_n) = \Im w.$$

Ceci découle facilement des inégalités :

$$|z_n - w| \leq |\Re(z_n) - \Re(w)| + |\Im(z_n) - \Im(w)|,$$

$$\begin{cases} |\Re(z_n) - \Re(w)| \leq |z_n - w|, \\ |\Im(z_n) - \Im(w)| \leq |z_n - w|. \end{cases}$$

3.I.A.3. Caractère complet de la droite complexe. —

Définition 3.I.4. — Soit (z_n) une suite de nombres complexes. On dit que la suite (z_n) *est de Cauchy* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N_ε tel que, si $n, m \geq N_\varepsilon$, alors :

$$|z_n - z_m| < \varepsilon.$$

Théorème 3.I.5. — *Une suite complexe converge si et seulement si elle est de Cauchy.*

Démonstration. — Ceci découle de nouveau des inégalités de la remarque 3.I.3. En effet, celles-ci permettent de dire que (z_n) est de Cauchy si et seulement si $\Re(z_n)$ et $\Im(z_n)$ sont de Cauchy, ce qui est équivalent d'après le théorème 1.III.5 à ce que $\Re(z_n)$ et $\Im(z_n)$ soient convergentes, donc à ce que (z_n) soit convergente. □

3.I.B. Séries complexes, convergence absolue. — Les séries complexes sont des séries à valeurs dans $\mathbb{C}$. Leur convergence en un point fixé revient à celle de la suite des sommes partielles.

Définition 3.I.6. — La série $\sum z_n$ de nombres complexes *converge* si la suite de nombre complexes (s_n) définie par comme somme partielle jusqu'au rang n est convergente :

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} z_k.$$

Remarque 3.I.7. — Si z_n ne tend pas vers 0, $\sum z_n$ ne peut converger.

Démonstration. — Si $\sum z_n$ converge, alors $\sum \Re z_n$ converge, donc $\Re z_n$ tend vers 0 d'après la proposition 2.I.7. Il en est de même pour $\Im z_n$, ainsi z_n tend vers 0.

□

Définition 3.I.8. — Soit $\sum z_n$ une série complexe. On dit que la suite $\sum z_n$ *converge absolument* si $\sum |z_n|$ converge.

Lemme 3.I.9. — *Une série à valeurs complexes qui converge absolument est convergente.*

Démonstration. — Soit $\sum z_n$ la série en question. Si la série $\sum z_n$ converge absolument, alors par définition $\sum |z_n|$ est une série convergente. Comme $|\Re z_n| \leq |z_n|$, la série numérique $\sum |\Re z_n|$ est convergente aussi par la proposition 2.II.2, donc $\sum \Re z_n$ converge par la proposition 2.III.2. De même, $\sum \Im z_n$ converge. On en déduit que $\sum z_n$ converge. □

3.I.C. Autres résultats réells valables en complexe. —

3.I.C.1. Produit de séries absolument convergentes. —

Proposition 3.I.10. — *Soit $\sum_{n\geq 0} x_n$ et $\sum_{n\geq 0} y_n$ séries complexes absolument convergentes et posons $z_n = \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k}$, $n \in \mathbb{N}$. Alors $\sum z_n$ converge absolument et :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n\right).$$

Démonstration. — D'abord un peu de notation. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$Z_n = \sum_{k=0}^{n} z_k, \qquad X_n = \sum_{k=0}^{n} x_k, \qquad Y_n = \sum_{k=0}^{n} y_j,$$

de sorte que :

$$Z_n = \sum_{0\leq i+j\leq n} x_i y_j, \qquad X_n Y_n = \sum_{0\leq i,j\leq n} x_i y_j.$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Les séries positives $\sum_n |x_n|$ et $\sum_n |y_n|$ étant convergentes, nous savons que le produit de leurs sommes tend vers la somme de la série $\sum w_n$ où $w_n = \sum_{k=0}^{n} |x_k||y_{n-k}|$. Donc on peut trouver n_ε tel que, pour tout $n \geq n_\varepsilon$, on ait :

$$\left|\sum_{0\leq i+j\leq n} |x_i||y_j| - \sum_{0\leq i,j\leq n} |x_i||y_j|\right| < \varepsilon.$$

On a alors :

$$|Z_n - X_n Y_n| = \left|\sum_{0\leq i+j\leq n} x_i y_j - \sum_{0\leq i,j\leq n} x_i y_j\right| \leq \left|\sum_{0\leq i+j\leq n} |x_i||y_j| - \sum_{0\leq i,j\leq n} |x_i||y_j|\right| < \varepsilon,$$

ce qui prouve l'énoncé. □

Sans modifications essentielles des démonstrations, nous pouvons dire que les résultats suivants, exprimés en réel, restent valides en complexe.

— La sommation par paquets d'une série complexe converge, et vers la même somme.
— Le changement d'ordre d'une série complexe absolument convergente reste convergent, et vers la même somm ; de plus une série complexe dont toute permutation converge est absolument convergente.
— La transformée d'Abel reste valide en complexe.

Exemple 3.I.11. — Soit $z = e^{i\vartheta}$, avec $\vartheta \in [0, 2\pi[$. Posons :

$$a_n = z^n = e^{in\vartheta}, \qquad b_n = \frac{1}{n}.$$

On a (b_n) positive et décroissante vers 0. Puis, pour $\vartheta \neq 0$:

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k e^{ik\vartheta}\right| = \frac{|e^{i(n+1)\vartheta} - 1|}{|e^{i\vartheta}| - 1},$$

et cette quantité est clairement bornée par $\frac{2}{|e^{i\vartheta}|-1}$. Donc grâce à la transformée d'Abel, on voit que $\sum \frac{e^{in\vartheta}}{n}$ converge pour tout $\vartheta \in]0, 2\pi[$.

3.II. Séries entières, convergence normale

Définition 3.II.1. — Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombre complexes. La *série entière* de terme général $a_n z^n$ est la suite :

$$s_n = \sum_{m=0}^{n} a_m z^m.$$

On note cette suite $\sum a_n z^n$.

A proprement parler, il s'agit d'une expression purement formelle. Cependant on peut penser à une série entière comme une série de fonctions.

3.II.A. Convergence simple. —

Définition 3.II.2. — Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, $\sum a_n z^n$ une série entière et considérons la série complexe $\sum a_n z_0^n$. Soit :

$$s_n = \sum_{m=0}^{n} a_m z_0^m.$$

On dit que $\sum a_n z^n$ *converge (simplement)* en z_0 vers $w \in \mathbb{C}$ si la suite des sommes partielles s_n converge vers w, i. e. $\lim_{n\to\infty} s_n = w$. On écrit alors :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n = w.$$

Ceci définit donc une application, dite *somme de la série*, dont le domaine de définition est constitué des points z_0 où $\sum a_n z^n$ est convergente :

$$z_0 \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n.$$

3.II.B. Convergence absolue. —

Définition 3.II.3. — On dit que $\sum a_n z_n$ *converge absolument* en $z_0 \in \mathbb{C}$ si la série numérique $\sum |a_n z_0^n|$ est convergente.

Lemme 3.II.4. — *Si la série entière $\sum a_n z^n$ converge absolument en z_0, alors elle converge simplement en z_0.*

Démonstration. — C'est le lemme 3.I.9 appliqué à $\sum z_n = \sum a_n z_0^n$. □

3.II.C. Convergence normale. —

Définition 3.II.5. — On dit que la série entière $\sum a_n z^n$ *converge normalement* sur une partie D de $\mathbb{C}$ s'il existe une série numérique $\sum u_n$ convergente telle que :

$$\left|a_n z^n\right| \leq u_n, \qquad \text{pour tout } z \in D.$$

Remarque 3.II.6. — Si $\sum a_n z^n$ converge normalement sur une partie D de $\mathbb{C}$, alors elle converge absolument en tout point z de D. En effet, il existe $\sum u_n$ convergente telle que $|a_n z^n| \leq u_n$ pour tout $z \in P$, donc $\sum a_n z^n$ converge absolument (donc simplement).

3.III. Convergence normale sur les disques

3.III.A. Lemme d'Abel. — Le résultat suivant, bien que élémentaire, est très important.

Théorème 3.III.1. — *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $\sum a_n z^n$ une série entière. Supposons que $(a_n z_0^n)$ soit bornée, ce qui arrive par exemple si $\sum a_n z^n$ est convergente en z_0. Alors, pour tout $r < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $D(r)$.*

Démonstration. — On peut supposer $z_0 \neq 0$, sans quoi il n'y a rien à démontrer. Le fait que $\sum a_n z_0^n$ converge implique que $a_n z_0^n$ tend vers 0, et en particulier que $(a_n z^n)$ est bornée.

Ainsi il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$|a_n z_0^n| \leq M.$$

Si r est un réel tel que $0 < r < |z_0|$, alors quel que soit $\zeta \in D(r)$ on a :

$$|a_n \zeta^n| = |a_n||\zeta^n| < |a_n| r^n = |a_n z_0^n| \frac{r^n}{|z_0|^n} \leq M \left(\frac{r}{|z_0|} \right)^n.$$

Donc $(a_n \zeta^n)$ est majorée par une série géométrique, qui converge car $\frac{r}{|z_0|} < 1$. Donc $\sum a_n z^n$ est normalement convergente sur $D(r)$. □

3.III.B. Rayon de convergence. —

Définition 3.III.2. — Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On définit la partie suivante de la demi droite positive $[0, +\infty[$:

$$X = \{r \in [0, +\infty[\mid (a_n r^n) \text{ est bornée}\}.$$

Évidemment X n'est pas vide car $0 \in X$. Le *rayon de convergence* de $\sum a_n z^n$ est, par définition, $+\infty$ si X n'est pas majorée, ou si X est bornée on pose :

$$R = \sup(X).$$

Théorème 3.III.3. — *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et R son rayon de convergence. Alors :*

i) si $R = 0$, $\sum a_n z^n$ ne converge que pour $z = 0$;

ii) si $R = +\infty$, $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout disque de $\mathbb{C}$ centré en 0;

iii) si $R \in]0, +\infty[$, alors :

a) si $|\zeta| > R$, alors la série $\sum a_n \zeta^n$ est divergente;

b) la série $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout disque centré en 0, de rayon $r < R$.

Démonstration. — Soit de nouveau :

$$X = \{r \in [0, +\infty[\mid (a_n r^n) \text{ est bornée}\}.$$

On a alors $R = \sup X$ dès que X est majorée.

Tout d'abord, si $|\zeta| > R$, alors $r = |\zeta|$ n'appartient pas à X, donc $(a_n r^n)$ n'est pas bornée. Ceci implique que $a_n \zeta^n$ ne tend pas vers 0, ainsi $\sum a_n \zeta^n$ diverge grossièrement. Nous avons montré (i) et (iiia). On peut supposer désormais $R > 0$.

Regardons la convergence normale. Soit $r < R$. Il existe alors $s \in X$ tel que $r < s$. Nous avons $(a_n s^n)$ bornée car $s \in X$. D'après le lemme d'Abel (appliqué à $z_0 = s$), la série $\sum a_n z^n$ est normalement convergente sur $D(r)$. Ceci montre (ii) et (iiib). □

3.III.C. Exemples. —

Exemple 3.III.4. — Un polynôme est un exemple de série entière. Son rayon de convergence est $+\infty$.

Exemple 3.III.5. — La série exponentielle complexe :

$$\exp(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}.$$

Son rayon de convergence est $+\infty$.

Exemple 3.III.6. — La règle de d'Alembert montre que le rayon de convergence de

$$\sum_{n\geq 1} n! z^n$$

est nul. Donc cette série ne converge que pour $z = 0$.

Exemple 3.III.7. — La série entière géométrique est

$$\sum_{n\geq 0} z^n.$$

Son rayon de convergence est 1, car (z^n) est bornée si et seulement si $|z| \leq 1$. Par contre, si $|z| \geq 1$, le terme général z^n ne tend pas vers 0. *Cette série ne converge en aucun point du cercle $C(R)$.*

Exemple 3.III.8. — La série entière :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n^2}$$

a rayon de convergence 1, ce que l'on voit immédiatement en utilisant la règle de d'Alembert. Soit ζ de module 1. Alors :

$$\left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}.$$

La série $\sum \frac{1}{n^2}$ étant convergente, on a la convergence absolue de $\sum \frac{z^n}{n^2}$ en z. *Cette série converge en tout point du cercle $C(R)$.*

Exemple 3.III.9. — La série harmonique :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$$

a rayon de convergence 1. Elle converge en $z = -1$, mais pas en $z = 1$. *Cette série converge en certain points du cercle $C(R)$ mais pas en tous.* Nous avons vu que $z = 1$ est le seul point de divergence sur le cercle unitaire de la série harmonique.

3.III.D. Détermination pratique. — Dans la proposition suivante, on utilise la convention $1/0 = +\infty$ et $1/+\infty = 0$.

Lemme 3.III.10. — *Soient $(u_n), (v_n)$ suites numériques, avec (u_n) convergente vers un réel $a \neq 0$. Alors les valeurs d'adhérence de $(u_n v_n)$ sont les réels de la forme ab où b est valeur d'adhérence de (v_n). En particulier, si $a > 0$:*

$$\limsup_{n\to\infty}(u_n v_n) = a \limsup_{n\to\infty} v_n.$$

Démonstration. — Si $b \in \mathbb{R}$ est valeur d'adhérence de (v_n), alors il existe une suite extraite v_{n_k} qui converge vers b donc :

$$\lim_{k\to\infty}(u_{n_k} v_{n_k}) = ab,$$

ainsi ab est valeur d'adhérence de $(u_n v_n)$. De même si $+\infty$ est valeur d'adhérence de (v_n) alors (v_n) n'est pas majorée, et comme (u_n) est bornée (car convergente) on a $(u_n v_n)$ pas majorée, donc $+\infty$ est valeur d'adhérence de $(u_n v_n)$. De même pour $-\infty$. Nous n'avons pas eu besoin de l'hypothèse $a \neq 0$ pour cette implication.

Réciproquement, si $c \in \mathbb{R}$ est valeur d'adhérence de $(u_n v_n)$ alors il existe une suite extraite $(u_{n_k} v_{n_k})$ qui converge vers c donc : suite extraite v_{n_k} qui converge vers b donc :

$$\lim_{k\to\infty}(v_{n_k}) = c/a,$$

puisque $a \neq 0$. Ainsi, $b = c/a$ est valeur d'adhérence de (v_n). Si $+\infty$ est valeur d'adhérence de $(u_n v_n)$, alors $(u_n v_n)$ n'est pas majorée. Aussi, $(1/u_n)$ tend vers $1/a \in \mathbb{R}$ et est donc bornée. Donc (v_n) n'est pas non plus majorée, donc $+\infty$ est valeur d'adhérence de (v_n). De même pour $-\infty$.

L'énoncé concernant la limite supérieure vient du fait que celle-ci est le maximum parmi les valeurs d'adhérence, et que, si $a > 0$:

$$a \max\{b \mid b \text{ valeur d'adhérence de } (v_n)\} = \max\{c \mid c \text{ valeur d'adhérence de } (u_n v_n)\}$$

□

***Proposition 3.III.11* (Formule d'Hadamard).** — *Le rayon de convergence R d'une série entière $\sum a_n z^n$ satisfait à:*

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}.$$

Démonstration. — Posons :

$$L = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}.$$

donc $L \in [0, +\infty]$. Pour tout $0 \neq \zeta \in \mathbb{C}$, on a :

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n \zeta^n|^{\frac{1}{n}} = L|\zeta|.$$

D'après la règle de Cauchy 2.II.9, on voit que :

— si $L = 0$, alors $\sum a_n \zeta^n$ converge absolument quel que soit $\zeta \in \mathbb{C}$, donc $R = +\infty$.

— si $L = +\infty$, alors $\sum a_n \zeta^n$ n'est borné que pour $\zeta = 0$, donc $R = 0$.

— si $0 < R < +\infty$:

  — si $|\zeta| < \frac{1}{L}$, alors $\sum a_n \zeta^n$ converge absolument;

— si $|\zeta| > \frac{1}{L}$, alors $a_n\zeta^n$ n'est pas bornée, ainsi $\sum a_n\zeta^n$ diverge.

De cette analyse on voit que $1/L = R$. □

Proposition 3.III.12. — *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, et supposons que*

$$\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)_n$$

ait une limite $L \in [0, +\infty]$. Alors le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est $\frac{1}{L}$.

Démonstration. — C'est le même raisonnement que pour la règle d'Hadamard, cette fois en utilisant la règle de d'Alembert au lieu de celle de Cauchy. □

3.IV. Continuité des séries entières, convergence uniforme

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On définit, pour tout $\zeta \in \mathbb{C}$ point de convergence de cette série, la fonction :

$$f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\zeta^n.$$

Le but de cette partie est de montrer qu'une fonction définie comme somme d'une série entière est continue à l'intérieur du disque de convergence. Pour le faire, nous passons par un cadre beaucoup plus large en considérant des séries de fonctions, en soulignant que la propriété de continuité de la limite découle de la convergence uniforme.

3.IV.A. Convergence uniforme. — La convergence uniforme est la notion qu'on utilise pour étudier la convergence des suites de fonctions. Le voisinage d'une fonction est considéré en tant que voisinage pour la norme uniforme, ou "norme infini". Autrement dit, on regardera pour une fonction f bornée sur une partie P de $\mathbb{C}$ ou de $\mathbb{R}$, le sup de $\left|f(\zeta)\right|$ sur $\zeta \in P$. Commençons par introduire la convergence simple.

3.IV.A.1. Convergence simple d'une suite de fonctions. — Soit (f_n) une suite de fonctions, bornées sur une partie P de $\mathbb{C}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, et f une fonction définie sur P, à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Définition 3.IV.1. — On dit que (f_n) *converge simplement* vers f si, pour tout $\zeta \in P$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\zeta) = f(\zeta).$$

Bien sûr, on peut donner des définitions analogues pour des suites de fonctions à variable réelle, et/ou à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Exemple 3.IV.2. — Soit, pour $n \geq 1$, $f_n(x) = x^n$ définie sur $P =]0, 1[$. Il est clair que, pour tout $x \in P$, on a $\lim_{n\to\infty}(x^n) = 0$, donc (f_n) converge simplement vers la fonction $f = 0$, définie aussi sur P. De même si $P = D(0, 1)$ la suite (f_n) définie par $f_n(z) = z^n$ converge vers la fonction nulle.

3.IV.A.2. Norme uniforme. — On fixe une partie $P \subset \mathbb{C}$ et on définit la norme uniforme d'une fonction f bornée sur P à valeurs dans $\mathbb{C}$. On peut aussi considérer f à valeurs réelles, ou de variable réelle et obtenir des définitions analogues.

Définition 3.IV.3. — Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie sur $P \subset \mathbb{C}$. On pose, pour f bornée sur P :

$$\left\|f\right\|_\infty = \sup_{\zeta \in P} |f(\zeta)|,$$

autrement on pose $\left\|f\right\|_\infty = +\infty$.

Remarque 3.IV.4. — La fonction $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur l'ensemble des fonctions bornées sur P.

Démonstration. — On a, pour f, g bornées sur P :

$$\left\|f+g\right\|_\infty \leq \left\|f\right\|_\infty + \left\|g\right\|_\infty. \tag{7}$$

En effet, pour tout $\zeta \in P$, on a

$$\left|f(\zeta)+g(\zeta)\right| \leq \left|f(\zeta)\right| + \left|g(\zeta)\right| \leq \sup_{\zeta_1 \in P}\left|f(\zeta_1)\right| + \sup_{\zeta_2 \in P}\left|g(\zeta_2)\right| = \left\|f\right\|_\infty + \left\|g\right\|_\infty,$$

donc on a (7) en prenant le sup sur $\zeta \in P$. □

3.IV.A.3. Convergence uniforme d'une suite de fonctions. — Soit (f_n) une suite de fonctions, définies sur une partie P de $\mathbb{C}$ ou de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, et f une fonction définie sur P, à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Définition 3.IV.5. — On dit que (f_n) *converge uniformément* vers f si, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier N tel que, quel que soit $n \geq N$, on ait :

$$\left\|f_n - f\right\|_\infty < \varepsilon.$$

Lemme 3.IV.6. — *Si (f_n) converge uniformément vers f dans P, alors (f_n) converge simplement vers f dans P.*

Démonstration. — Soit $\zeta \in P$ et fixons $\varepsilon > 0$. Il existe alors N tel que :

$$n \geq N \Rightarrow \left\|f_n - f\right\|_\infty < \varepsilon.$$

Donc, pour tout $\zeta \in P$:

$$n \geq N \Rightarrow \left|f_n(\zeta) - f(\zeta)\right| < \varepsilon.$$

Ainsi $(f_n(\zeta))$ tend vers $f(\zeta)$ lorsque n tend vers ∞. □

Exemple 3.IV.7. — Reprenons l'exemple 3.IV.2 donc $f_n(x) = x^n$ pour tout $x \in]0,1[$. On voit que (f_n) ne converge pas uniformément. En effet, si (f_n) convergeait uniformément, alors forcément ce serait vers la fonction nulle $f = 0$ car (f_n) converge déjà simplement vers f. Cependant, fixons $0 < \varepsilon < 1$ et supposons qu'il existe n_0 tel que $n \geq n_0$ implique $\sup_{x\in P} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, i. e. $x^n = |x^n - 0| < \varepsilon$ pour tout $x \in]0,1[$, en particulier $x^{n_0} < \varepsilon$. Bien sûr $x_0 = \varepsilon^{1/n_0} \in]0,1[$, donc $x_0^{n_0} = \varepsilon$, contre l'hypothèse $x^{n_0} < \varepsilon$ pour tout $x \in]0,1[$.

Si en revanche on fixe $P =]0,1/2]$, alors la convergence est uniforme. En effet, soit $\varepsilon > 0$. Comme $1/2^n$ tend vers 0, on peut trouver n_0 tel que $1/2^n < \varepsilon$, quel que soit $n \geq n_0$. Ainsi, par croissance de la fonction x^n, on a $x^n < 1/2^n < \varepsilon$ pour tout $x \in]0,1/2[$ et $n \geq n_0$, autrement dit $\sup_{x\in P} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Exemple 3.IV.8. — Soit $k \in \mathbb{N}$. La suite de fonctions $f_n(x) = x^k/(x^2+n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $f = 0$. Pour $k = 0$ on a $0 \leq f_n \leq 1/n$, ce qui entraîne la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$. Pour $k \geq 1$ on a :

$$f'(x) = \frac{x^{k-1}}{(x^2+n)^2}((k-2)x^2+kn).$$

Le sup sur $\mathbb{R}$ de $|f_n(x)|$ est $n^{-1/2}/2$ si $k=1$, ou 1 pour $k=2$, ou $+\infty$ si $k \geq 3$. Pour $k = 0, 1$ la convergence est donc uniforme sur $\mathbb{R}$, tandis que pour $k \geq 2$ on a convergence simple mais pas uniforme.

3.IV.A.4. Suites de fonctions uniformément de Cauchy. — Nous allons voir maintenant que, si une suite de fonctions est à valeurs complexes (ou réelles) alors la condition d'être de uniformément de Cauchy (à définir) est équivalente à celle d'être uniformément convergente. Autrement dit nous allons montrer un résultat de complétude pour la norme uniforme.

On fixe toujours une partie $P \subset \mathbb{C}$ et on regarde une suite de fonctions (f_n) dont le domaine de définition est contenu dans P, à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Définition 3.IV.9. — On dit que (f_n) est *uniformément de Cauchy* sur P si, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier N tel que, quel que soit $n, m \geq N$, on ait :

$$\left\|f_n - f_m\right\|_\infty < \varepsilon.$$

Théorème 3.IV.10. — *Une suite de fonctions définies sur une partie P de $\mathbb{C}$ est uniformément de Cauchy si et seulement si elle est uniformément convergente.*

Démonstration. — Soit (f_n) une suite uniformément convergente vers f dans P. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$ implique :

$$\left\|f_n - f\right\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors pour tout $n, m \geq N$ on a :

$$\left\|f_n - f_m\right\|_\infty \leq \left\|f_n - f\right\|_\infty + \left\|f - f_m\right\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Donc la suite est uniformément de Cauchy.

Réciproquement, soit (f_n) uniformément de Cauchy sur P. Alors pour tout $\zeta \in P$ on a $(f_n(\zeta))$ de Cauchy dans $\mathbb{C}$, donc $(f_n(\zeta))$ est convergente : notons $f(\zeta)$ la limite.

Montrons alors que (f_n) converge uniformément vers f dans P. Soit $\varepsilon > 0$, et N tel que $n, m \geq N$ implique :

$$\left\|f_n - f_m\right\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nous allons montrer que, si $n \geq N$, on a :

$$\left\|f_n - f\right\|_\infty < \varepsilon.$$

Soit alors $\zeta \in P$. Comme la suite $(f_m(\zeta))$ tend vers $f(\zeta)$, il existe $M = M(\varepsilon, \zeta)$ tel que, pour tout $m \geq M$ on ait :

$$|f_m(\zeta) - f(\zeta)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Quel que soit $m \in \mathbb{N}$, on peut utiliser l'inégalité :

$$|f_n(\zeta) - f(\zeta)| \leq |f_n(\zeta) - f_m(\zeta)| + |f_m(\zeta) - f(\zeta)|,$$

et si $m \geq \max(M, N)$ on en déduit :

$$|f_n(\zeta) - f(\zeta)| < |f_n(\zeta) - f_m(\zeta)| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

On prend l'extrême supérieur sur $\zeta \in P$ et on écrit :

$$\left\| f_n - f \right\|_\infty = \sup_{\zeta \in P} |f_n(\zeta) - f(\zeta)| \leq \sup_{\zeta \in P} |f_n(\zeta) - f_m(\zeta)| + \frac{\varepsilon}{2} = \left\| f_n - f_m \right\|_\infty + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ainsi (f_n) converge vers f uniformément dans P. □

3.IV.B. Convergence normale et uniforme des séries de fonctions. — La convergente normale, que nous avons vu pour les séries entières, peut être définie plus en général pour les séries de fonctions.

3.IV.B.1. Convergence uniforme d'une série de fonctions. — On peut définir des séries de fonctions à partir des suites de fonctions, simplement en prenant la somme jusqu'à un rang fixé des termes d'une suite.

Lemme 3.IV.11. — *Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur $P \subset \mathbb{C}$. Alors $\sum f_n$ est uniformément convergente sur P si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$ et $p \geq 0$ impliquent :*

$$\sup_{\zeta \in P} |f_{n+1}(\zeta) + \cdots + f_{n+p}(\zeta)| < \varepsilon.$$

Démonstration. — En effet, cette condition est équivalente à ce que la suite des sommes partielles de $\sum f_n$ soit uniformément de Cauchy, ce qui équivaut à ce qu'elle soit uniformément convergente. □

3.IV.B.2. Convergence normale d'une série de fonctions. —

Définition 3.IV.12. — Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur une partie P de $\mathbb{C}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$. On dit que $\sum f_n$ *converge normalement* sur P s'il existe une série numérique convergente $\sum u_n$ telle que :

$$\left\| f_n \right\|_\infty \leq u_n.$$

Proposition 3.IV.13. — *Soit $\sum f_n$ une série de fonctions normalement convergente dans une partie $P \subset \mathbb{C}$. Alors $\sum f_n$ converge uniformément dans P.*

Démonstration. — Soit $\sum u_n$ une série positive convergente qui domine $\sum f_n$ sur P, i. e. telle que pour tout $\zeta \in P$ on ait $|f_n(\zeta)| \leq u_n$. Alors pour tout $\zeta \in P$ on a :

$$\sup_{\zeta \in P} |f_{n+1}(\zeta) + \cdots + f_{n+p}(\zeta)| \leq \sup_{\zeta_1 \in P} |f_{n+1}(\zeta_1)| + \cdots + \sup_{\zeta_p \in P} |f_{n+p}(\zeta_p)| \leq u_{n+1} + \cdots + u_{n+p} < \varepsilon,$$

la dernière inégalité étant valide pour tout $n \geq N$ et $p \geq 0$, où N existe en vertu du fait que, la série $\sum u_n$ étant convergente, sa suite des sommes partielles est de Cauchy. □

3.IV.C. Continuité de la limite uniforme. —

3.IV.C.1. Continuité d'une fonction de variable complexe. — Soit $\zeta_0 \in \mathbb{C}$. Soit P une partie de $\mathbb{C}$ et $f : P \to \mathbb{C}$ une application.

Définition 3.IV.14. — On dit que f est *définie au voisinage* de ζ_0 si, pour tout $r > 0$, le domaine de définition P de f intercepte $D(\zeta_0, r)$, i.e. il existe $\zeta \in P \cap D(\zeta_0, r)$.

Ceci équivaut à ce que ζ_0 soit dans l'adhérence du domaine de définition de f. Pour une fonction définie au voisinage de ζ_0 on peut formuler la définition de limite.

Définition 3.IV.15. — Soit $f : P \to \mathbb{C}$ définie au voisinage de $\zeta_0 \in \mathbb{C}$ et soit $w \in \mathbb{C}$. On dit que f *tend vers* w en ζ_0, noté $\lim_{\zeta \to \zeta_0} f(\zeta) = w$, si $\forall \varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que :

$$\zeta \in P \cap D(\zeta_0, \delta) \Rightarrow |f(\zeta) - w| < \varepsilon.$$

Si f est définie en ζ_0, on dit que f est *continue* en ζ_0 si $\lim_{\zeta \to \zeta_0} f(\zeta) = f(\zeta_0)$.

Pour ce qui concerne la limite vers l'infini, on pense que $f : P \to \mathbb{C}$ est définie dans "un voisinage de l'infini" si le domaine de définition P de f intercepte le complément de tout disque centré en l'origine, i.e. si, pour tout $r_0 \geq 0$ fixé, il existe $\zeta \in P$ avec $|\zeta| \geq r_0$.

Dans ce cas on écrit $\lim_{\zeta \to \infty} f(z) = w$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe R tel que, si $\zeta \in P$ et $|\zeta| \geq R$, alors $|f(\zeta) - w| < \varepsilon$.

3.IV.C.2. Limite uniforme : échange de limites et continuité. — Le résultat suivant exprime le fait fondamental suivant : pour une suite de fonctions (f_n) uniformément convergente, on peut intervertir les passages à la limite en $\zeta \to \zeta_0$ et $n \to \infty$.

Théorème 3.IV.16. — *Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs complexes ou réelles, définies sur une partie P de $\mathbb{C}$ ou de $\mathbb{R}$ et soit ζ_0 dans l'adhérence de P. Supposons que (f_n) converge vers f, uniformément en P, et que les limites suivantes existent finies :*

$$\lim_{\zeta \to \zeta_0} f_n(\zeta) = w_n,$$
$$\lim_{n \to \infty} w_n = w.$$

Alors f est définie au voisinage de ζ_0 et :

$$\lim_{\zeta \to \zeta_0} f(\zeta) = w.$$

En particulier, si les f_n sont continues en ζ_0 alors f l'est.

Démonstration. — D'abord, ζ_0 appartient à l'adhérence de P et (f_n) converge ponctuellement vers f sur P donc P est dans le domaine de définition de f, ainsi ζ_0 appartient à l'adhérence du domaine de définition de f, i.e. f est définie au voisinage de ζ_0.

Soit $\varepsilon > 0$. On veut montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $\zeta \in D(\zeta_0, \delta) \cap P$, on ait :

$$\left| f(\zeta) - w \right| < \varepsilon.$$

Par convergence uniforme de (f_n) sur P il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, on ait :

$$\sup_{\zeta \in P} \left| f_n(\zeta) - f(\zeta) \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Il existe aussi M tel que, pour tout $n \geq M$, on ait :

$$|w_n - w| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Prenons $n \geq \max(N, M)$. Il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $\zeta \in D(\zeta_0, \delta) \cap P$, on ait :

$$\left|f_n(\zeta) - w_n\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Alors :

$$\left|f(\zeta) - w\right| \leq \left|f(\zeta) - f_n(\zeta)\right| + \left|f_n(\zeta) - w_n\right| + |w_n - w| < \varepsilon.$$

Pour l'affirmation sur la continuité, on remplace w_n par $f_n(\zeta_0)$, donc f_n continue en ζ_0 équivaut à $\lim_{\zeta\to\zeta_0} f_n(\zeta) = w_n$. On a alors que $\lim_{n\to\infty} w_n = f(\zeta_0)$. En effet, (f_n) converge ponctuellement vers f sur P, donc en ζ_0, ce qui veut dire $\lim_{n\to\infty} f_n(\zeta_0) = f(\zeta_0)$. La conclusion $\lim_{\zeta\to\zeta_0} f(\zeta) = w$ signifie donc que f est continue en ζ_0. □

Le résultat du théorème peut se reformuler en disant que, sous l'hypothèse de convergence uniforme, on peut échanger les limites :

$$\lim_{\zeta\to\zeta_0} \lim_{n\to\infty} f_n(\zeta) = \lim_{n\to\infty} \lim_{\zeta\to\zeta_0} f_n(\zeta).$$

En effet, à gauche nous avons $\lim_{\zeta\to\zeta_0} f(\zeta)$ et à droite $w = \lim_{n\to\infty} w_n$.

Corollaire 3.IV.17. — *Une série entière est continue en tout point à l'intérieur du disque de convergence.*

Démonstration. — La série entière est une suite de fonctions polynomiales, donc évidemment continues. La convergence vers la somme de la série étant normale (donc uniforme) dans le disque de convergence, on a la continuité de la fonction somme de la série. □

3.IV.D. Suites doubles. — Dans le même esprit que le théorème précédent, nous pouvons traiter les suites doubles $(u_{n,p}) : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{C}$. On considère $(u_{n,p})$ comme une suite de fonctions (f_n) où $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ est définie par $f_n(p) = u_{n,p}$.

3.IV.D.1. Convergence uniforme de suites doubles. — Une fonction f sur $P = \mathbb{N}$ est identifiée à une suite $f = (v_p)$ définie par $f(p) = v_p$, pour tout $p \in \mathbb{N}$. Ainsi, la "norme infini" sur $P = \mathbb{N}$ de $f = (v_p)$ est :

$$\left\|f\right\|_\infty = \sup_{p\in\mathbb{N}} |v_p|,$$

si la suite (v_p) est bornée, ou $\left\|f\right\|_\infty = +\infty$ autrement.

Une suite (f_n) est identifiée à une suite double $(u_{n,p})$ définie, pour $n, p \in \mathbb{N}$, par $u_{n,p} = f_n(p)$. La suite (f_n) converge uniformément vers f si, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geq n_\varepsilon$, alors :

$$\left\|f - f_n\right\|_\infty = \sup_{p\in\mathbb{N}} |u_{n,p} - v_p| < \varepsilon.$$

Proposition 3.IV.18. — *Soit $(u_{n,p})$ une suite double et notons $f_n(p) = u_{n,p}$. Supposons que (f_n) soit uniformément convergente sur $\mathbb{N}$ et que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on ait $\lim_{p\to\infty} u_{n,p} = w_n \in \mathbb{C}$ avec (w_n) convergente. Alors :*

$$\lim_{p\to\infty} \lim_{n\to\infty} u_{n,p} = \lim_{n\to\infty} \lim_{p\to\infty} u_{n,p}.$$

Démonstration. — Soit $\varepsilon > 0$ et $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_1$ implique $|w_n - w| < \varepsilon/3$, où w est la limite de (w_n) i.e. :

$$w = \lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} \lim_{p\to\infty} u_{n,p}.$$

Soit f la limite uniforme de (f_n) et notons $v_p = f(p)$. On a facilement $v_p = \lim_{n\to\infty} u_{n,p}$ pour tout p. Soit $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq n_2$, on ait :

$$\left\|f_n - f\right\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pour $p \in \mathbb{N}$ on a $|u_{n,p} - v_p| \leq \left\|f_n - f\right\|_\infty < \varepsilon/3$.

Choisissons $n \geq \max\{n_1, n_2\}$. On a alors :

$$|v_p - w| \leq |w - w_n| + |u_{n,p} - w_n| + |u_{n,p} - v_p| < |u_{n,p} - w_n| + \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour pour $p \geq p_0$, on ait $|u_{n,p} - w_n| < \varepsilon/3$. Donc pour $p \geq p_0$ on a :

$$|v_p - w| < |u_{n,p} - w_n| + \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

□

3.IV.D.2. Fubini discret. —

Théorème 3.IV.19. — *Soit $(u_{n,p})$ une suite complexe double. Supposons que :*

i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_p u_{n,p}$ est absolument convergente;

ii) la série $\sum_n \sum_{p=0}^{\infty} |u_{n,p}|$ est convergente.

Alors on a la formule d'inversion :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} u_{n,p} = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,p}.$$

Démonstration. — On pose $g_n(p) = \sum_{j=0}^{p} u_{n,j}$ et $w_n = \sum_{j=0}^{\infty} \left|u_{n,j}\right|$, donc $\sum_{n\geq 0} w_n$ est une série positive convergente.

Commençons par observer que $\sum g_n$ est une série de fonctions totalement convergente sur $\mathbb{N}$ car :

$$\left\|g_n(p)\right\|_\infty = \sup_{p\in\mathbb{N}} \left|\sum_{j=0}^{p} u_{n,j}\right| \leq \sup_{p\in\mathbb{N}} \sum_{j=0}^{p} \left|u_{n,j}\right| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left|u_{n,j}\right| = w_n,$$

et $\sum_{n\geq 0} w_n$ est une série convergente.

On pose $G_n = \sum_{i=0}^{n} g_i$ et on obtient une suite (G_n) de fonctions uniformément convergente sur $\mathbb{N}$, vers la fonction $G : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ définie comme somme de la série i. e. par :

$$G(p) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(p) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{p} u_{n,j}.$$

Remarquons que, pour $j \in \mathbb{N}$, $\sum_n u_{n,j}$ converge absolument, car $\sum w_n$ converge et :

$$\left|u_{n,j}\right| \leq \sum_{p=0}^{\infty}\left|u_{n,p}\right| = w_n.$$

Donc, par somme finie de séries convergentes on obtient :

$$G(p) = \sum_{j=0}^{p}\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,j}.$$

Maintenant, nous allons vérifier que $\lim_{p\to\infty} G_n(p)$ existe finie pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n\to\infty}\lim_{p\to\infty} G_n(p)$ existe finie.

Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a $\sum_p u_{i,p}$ absolument convergente, donc $\lim_{p\to\infty} g_i(p) = \sum_{p=0}^{\infty} u_{i,p}$ existe finie. Par somme finie de limites on écrit donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{p\to\infty}\sum_{i=0}^{n} g_i(p) = \sum_{i=0}^{n}\lim_{p\to\infty} g_i(p),$$

et cette limite existe finie. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a donc :

$$\lim_{p\to\infty} G_n(p) = \lim_{p\to\infty}\sum_{i=0}^{n} g_i(p) = \sum_{i=0}^{n}\lim_{p\to\infty} g_i(p) = \sum_{i=0}^{n}\lim_{p\to\infty}\sum_{j=0}^{p} u_{i,j} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{p=0}^{\infty} u_{i,p}.$$

Enfin il faut vérifier que $\lim_{n\to\infty} G_n(p)$ existe finie. Mais ceci est clair car :

$$\left|\sum_{p=0}^{\infty} u_{i,p}\right| \leq \sum_{p=0}^{\infty}\left|u_{i,p}\right| = w_n$$

et $\sum w_n$ converge. On peut donc appliquer la proposition 3.IV.18 et écrire :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} u_{n,p} &= \lim_{n\to\infty}\lim_{p\to\infty} G_n(p) = \lim_{p\to\infty}\lim_{n\to\infty} G_n(p) = \\ &= \lim_{p\to\infty} G(p) = \lim_{p\to\infty}\sum_{j=0}^{p}\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,j} = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,p}.\end{aligned}$$

□

Remarque 3.IV.20. — L'échange entre somme et limite n'est plus valide en général si la convergence est simple mais pas uniforme. Par exemple, on peut considérer :

$$u_{n,p} = \frac{p}{(n+p)(n+p-1)}.$$

On obtient $\lim_{p\to\infty} u_{n,p} = 0$ donc $\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{p\to\infty} u_{n,p} = 0$. Par contre, comme $u_{n,p} = n/(n+p) - (n-1)/(n+p-1)$, la somme partielle jusqu'au rang n vaut $n/(n+p)$, ainsi $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n,p} = 1$ donc $\lim_{p\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_{n,p} = 1$.

3.V. Dérivation de séries

3.V.A. Dérivation au sens complexe. —

Définition 3.V.1. — Soit f une fonction à valeurs complexes, définie sur un disque ouvert centré en ζ_0. On dit que f est $\mathbb{C}$-*dérivable en* ζ_0 si la limite suivante existe finie :

$$\lim_{\zeta\to\zeta_0}\frac{f(\zeta)-f(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}.$$

Si la dérivée existe, alors on la note :

$$f'(\zeta_0).$$

3.V.B. Série entière dérivée. —

Définition 3.V.2. — Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On appelle *série entière dérivée :*

$$\sum n a_n z^{n-1}.$$

3.V.B.1. Rayon de convergence de la série dérivée. —

Proposition 3.V.3. — *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors la série dérivée $\sum n a_n z^{n-1}$ a aussi rayon de convergence R.*

Démonstration. — On voit que $\sum n a_n z^{n-1}$ et $\sum n a_n z^n$ ont le même rayon de convergente. En effet :

$$|n a_n \zeta^n| = |\zeta||n a_n \zeta^{n-1}|,$$

donc l'une de ces deux suites est bornée si et seulement si l'autre l'est.

Maintenant par la formule d'Hadamard on voit que $\sum n a_n z^n$ et $\sum a_n z^n$ ont le même rayon de convergence. En effet, soit R' le premier et R le second. Alors :

$$\frac{1}{R'} = \limsup_{n\to\infty}|n a_n|^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{R},$$

car $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$ simplement puisque :

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\exp\left(\frac{1}{n}\ln(n)\right) = e^0 = 1.$$

□

3.V.B.2. Dérivabilité complexe d'une série entière. —

Théorème 3.V.4. — *La fonction f définie par une série entière $\sum a_n z^n$ dans le disque de convergence $D(R)$ est $\mathbb{C}$-dérivable et en tout point $\zeta_0 \in D(R)$ on a :*

$$f'(\zeta_0) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n \zeta_0^{n-1}.$$

Démonstration. — Soit $\zeta \in D(R)\setminus\{\zeta_0\}$. On a :

$$\frac{f(\zeta)-f(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0} = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(\zeta),$$

avec :

$$v_n(\zeta) = a_n(\zeta^{n-1}+\zeta^{n-2}\zeta_0+\cdots+\zeta\zeta_0^{n-2}+\zeta_0^{n-1}) = a_n\sum_{k=0}^{n-1}\zeta^k\zeta_0^{n-k-1}.$$

Choisissons alors $0<r<R$ de sorte que $\zeta,\zeta_0 \in D(r)$. On a alors :

$$|v_n(\zeta)| \leq n|a_n|r^n.$$

La série $\sum n|a_n|r^n$ converge puisque la série dérivée converge absolument à l'intérieur de sont disque de convergence, c'est à dire $D(R)$. Ainsi la série fonctions $\sum v_n$ converge normalement, donc uniformément sur $D(r)$. De plus, chacune des fonctions v_n est évidemment continue sur $\mathbb{C}$, donc $\sum v_n$ converge vers une fonction g continue, définie sur $D(r)$. Ainsi, comme $\zeta_0 \in D(r)$, la limite :

$$g(\zeta_0) = \lim_{\zeta\to\zeta_0}\frac{f(\zeta)-f(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}$$

existe, ainsi $f'(\zeta_0)=g(\zeta_0)$ existe et f est dérivable en ζ_0. De plus, en remplaçant ζ par ζ_0 dans l'expression de $v_n(\zeta)$, $g(\zeta_0)$ est la série dérivée $\sum n a_n z^{n-1}$ calculée en ζ_0. □

3.V.B.3. Indéfinie dérivabilité. —

Corollaire 3.V.5. — *Une fonction f définie comme somme d'une série entière $\sum a_n z^n$ est indéfiniment $\mathbb{C}$-dérivable à l'intérieur du rayon de convergence R. On a, pour tout $k\geq 0$ et tout $\zeta \in D(R)$:*

$$\begin{aligned} f^{(k)}(\zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n\zeta^{n-k} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}(m+k)\cdots(m+1)a_{m+k}\zeta^m, \\ f^{(k)}(0) &= k!a_k. \end{aligned}$$

3.VI. Développement en série entière en 0

Définition 3.VI.1. — Soit g une fonction de variable complexe définie dans une partie P de $\mathbb{C}$ contenant 0. On dit que g est *développable en série entière sur un disque de rayon* $r>0$ s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R\geq r$ telle que, pour tout $\zeta\in D(r)$, on ait :

$$g(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\zeta^n.$$

Exemple 3.VI.2. — La fonction $g(z)=\frac{1}{1-z}$ est développable en série entière sur $D(1)$, la série entière en question étant $\sum z^n$.

Corollaire 3.VI.3. — *Une fonction développable en série entière sur un disque centré en de* 0 *est indéfiniment dérivable sur ce disque.*

3.VI.A. Unicité du développement. —

Proposition 3.VI.4. — *Soit g développable en série entière sur un disque $D(0,r)$, avec $r >$* 0. *Alors ce développement est unique.*

Démonstration. — Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières fournissant en développement en série entière de f autour de 0, disons sur le disque $D(r)$. Alors bien sûr :

$$g(0) = a_0 = b_0.$$

Par récurrence, on peut supposer $a_k = b_k$ pour tout $k \leq m$ et montrer que alors $a_{m+1} = b_{m+1}$. On en déduit que pour tout $\zeta \in D(r)$:

$$\zeta^{m+1} \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \zeta^{n-m-1} = \zeta^{m+1} \sum_{n=m+1}^{\infty} b_n \zeta^{n-m-1},$$

donc sur $\zeta \neq 0$:

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \zeta^{n-m-1} = \sum_{n=m+1}^{\infty} b_n \zeta^{n-m-1},$$

Par continuité, ceci reste vrai en $\zeta = 0$, ce qui implique $a_{m+1} = b_{m+1}$. □

3.VI.B. Série de Taylor. —

Définition 3.VI.5. — Soit f une fonction indéfiniment dérivable sur un disque $D(r)$ non vide de $\mathbb{C}$. On appelle alors *série de Taylor* de f la série entière :

$$\sum a_n z^n, \qquad \text{avec } a_n \text{ défini par :} \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Proposition 3.VI.6. — *Soit g une fonction développable en série entière sur un disque autour de* 0. *Alors on a, pour tout ζ appartenant à ce disque :*

$$f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} \zeta^n.$$

Démonstration. — Soit $\sum a_n z^n$ un développement de g autour de 0. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on a alors :

$$g^{(k)}(0) = k! a_k,$$

d'après l'expression de la dérivée d'ordre k de $\sum a_n z^n$ en 0. En passant par l'unicité du développement, on a la conclusion. □

***Exemple 3.VI.7* (Le classique incontournable).** — Considérons la fonction :

$$g(z) = \exp\left(\frac{-1}{z^2}\right).$$

On voit que g est indéfiniment dérivable en 0 au sens réel, mais que g n'est pas développable en série entière en 0. En effet, toutes les dérivées de g s'annulent en 0, donc si g

admettait un développement en série entière en 0, celui-ci s'identifierait avec la série de Taylor de g, qui est identiquement nulle.

3.VI.C. Séries de Taylor classiques. —

3.VI.C.1. Exponentielle. — La série entière exponentielle $\sum \frac{1}{n!} z^n$ a rayon de convergence infini. La fonction exponentielle $e^z = \exp(z)$ est définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$e^\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \zeta^n.$$

3.VI.C.2. Logarithme. — La série entière harmonique $\sum \frac{1}{n} z^n$ a rayon de convergence 1. A l'intérieur du disque de convergence $D(0,1)$ on a :

$$\ln(\zeta+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \zeta^n.$$

La formule ci-dessus vaut (d'après analyse de la série harmonique sur son cercle de convergence) pour tout ζ de module 1 hormis pour $\zeta = -1$.

3.VI.C.3. Puissance. — Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On a, pour $\zeta \in D(0,1)$:

$$(1+\zeta)^\alpha = \exp(\alpha \ln(1+\zeta)) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n(n-1)\cdots 1} \zeta^n.$$

3.VI.C.4. Sinus et cosinus. — Les fonctions sinus et cosinus sont définies par les séries entières suivantes, de rayon de convergence infini.

$$\sin(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \zeta^{2n+1},$$

$$\cos(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \zeta^{2n}.$$

La fonction tangente fait apparaître les nombres de Bernoulli (B_n), définis par la relation suivante, valide pour $|x| < 2\pi$:

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n.$$

On a alors le développement en série, de rayon de convergence $\pi/2$:

$$\tan(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} |B_{2n}| \frac{4^n(4^n-1)}{(2n)!} \zeta^{2n-1}.$$

3.VI.C.5. Sinus et cosinus hyperboliques. — Les fonctions sinus et cosinus hyperboliques sont définies par les séries entières suivantes, de rayon de convergence infini.

$$\sinh(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \zeta^{2n+1},$$

$$\cosh(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \zeta^{2n}.$$

La tangente hyperbolique a rayon de convergence $\pi/2$ et s'écrit :

$$\tan(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n} \frac{4^n(4^n-1)}{(2n)!} \zeta^{2n-1}.$$

3.VI.C.6. Fonctions trigonométriques et hyperboliques inverses. — Les développement en série entière des fonctions arcsinus, arccosinus et arctangente ont rayon de convergence 1 :

$$\begin{aligned}
\arcsin(\zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)} \zeta^{2n+1},\\
\arccos(\zeta) &= \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)} \zeta^{2n+1},\\
\operatorname{arsh}(\zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)} \zeta^{2n+1},\\
\operatorname{artan}(\zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \zeta^{2n+1},\\
\operatorname{arth}(\zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \zeta^{2n+1}.
\end{aligned}$$

3.VII. Opération sur les séries

3.VII.A. Combinaison linéaire et produit. —

Théorème 3.VII.1. — *Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ séries entières, et notons R et S, respectivement, leurs rayons de convergence.*

i) Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, considérons la série entière :

$$\sum (\lambda a_n + \mu b_n) z^n$$

et notons T son rayon de convergence. Alors on a :

$$T \geq \min(R, S),$$

et pour tout $\zeta \in D(T)$, la somme de cette série vaut :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) \zeta^n.$$

ii) Soit U le rayon de convergence de la série entière :

$$\sum c_n z^n, \qquad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Alors :

$$U \geq \min(R, S),$$

et la somme de cette série converge vers le produit de sommes des deux séries.

Démonstration. — Soit $r \in \mathbb{R}$ non négatif tel que $r < \min(R,S)$. Alors les suites $(a_n r^n)$ et $(b_n r^n)$ sont bornées, disons par M et N. Il est alors clair que $((\lambda a_n + \mu b_n) r^n)$ est bornée :

$$|(\lambda a_n + \mu b_n) r^n| \leq |\lambda a_n r^n| + |\mu b_n r^n| \leq |\lambda| M + |\mu| N.$$

Ainsi :

$$\sup\{r \in [0,+\infty[\mid ((\lambda a_n + \mu b_n) r^n) \text{ est bornée}\} \geq \min(R,S).$$

Pour le produit, on utilise à peu près le même raisonnement. En effet, pour tout point $\zeta \in \mathbb{C}$ à l'intérieur du plus petit des deux disques de convergence, on a :

$$\sum a_n \zeta^n \text{ et } \sum b_n \zeta^n \text{ absolument convergentes.}$$

Donc nous pouvons utiliser nos résultats sur le produit de séries positives convergentes pour dire que $\sum c_n \zeta^n$ converge absolument, car :

$$|c_n \zeta^n| = \left| \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right| |\zeta|^n \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k b_{n-k}| |\zeta|^n,$$

et cette dernière série est convergente. Ceci montre que $U \geq \min(R,S)$.

Ensuite, si on note $s_n(\zeta)$, $t_n(\zeta)$ et $u_n(\zeta)$ les sommes partielles jusqu'au rang n de $\sum a_n \zeta^n$, $\sum b_n \zeta^n$ et $\sum c_n \zeta^n$. Ce qu'on veut montrer est :

$$\lim_{n\to\infty} (s_n t_n - u_n) = 0.$$

Écrivons explicitement ce terme. C'est :

$$\sum_{0 \leq i,j \leq n} a_i b_j \zeta^{i+j} - \sum_{0 \leq i+j \leq n} a_i b_j \zeta^{i+j} = \sum_{\substack{0 \leq i,j \leq n \\ i+j \geq n+1}} a_i b_j \zeta^{i+j}.$$

Nous savons, par le résultat sur le produit de séries positives, que :

$$\lim_{n\to\infty} (|s_n t_n| - |u_n|) = 0.$$

Donc :

$$\sum_{0 \leq i,j \leq n} |a_i b_j \zeta^{i+j}| - \sum_{0 \leq i+j \leq n} |a_i b_j \zeta^{i+j}| = \sum_{\substack{0 \leq i,j \leq n \\ i+j \geq n+1}} |a_i b_j \zeta^{i+j}|$$

tend vers 0 lorsque n tend vers ∞. Mais :

$$\left| \sum_{\substack{0 \leq i,j \leq n \\ i+j \geq n+1}} a_i b_j \zeta^{i+j} \right| \leq \sum_{\substack{0 \leq i,j \leq n \\ i+j \geq n+1}} |a_i b_j \zeta^{i+j}|,$$

donc $|s_n t_n - u_n|$ tend aussi vers 0 lorsque n tend vers ∞. □

3.VII.B. Composition de séries. —

3.VII.B.1. Série composée. —

Théorème 3.VII.2. — *Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ séries entières, de rayon de convergence $R > 0$ et $S > 0$, et notons respectivement f et g les fonctions somme des deux séries. Supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, avec $0 < \alpha < S$, tel que :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| \alpha^n < R.$$

Alors il existe une série entière $\sum c_n z^n$, de rayon de convergence $T \geq \alpha$, telle que pour tout $\zeta \in D(T)$ on ait :

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n = f(g(\zeta)).$$

Démonstration. — Soit $\zeta \in \mathbb{C}$, avec $|\zeta| \leq \alpha$. On a $|\zeta| < S$ donc $g(\zeta)$ est défini. On pose :

$$G(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} |b_n||\zeta|^n.$$

Ceci est bien défini aussi. Notre hypothèse est $G(\alpha) < R$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On s'intéresse à $g(\zeta)^n$, qui peut être exprimé comme somme de la série obtenue comme produit de n fois la série $\sum b_p \zeta^p$ avec elle-même, autrement dit :

$$g(\zeta)^n = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{i_1+\cdots+i_n=p} b_{i_1} \cdots b_{i_n} \zeta^p.$$

Posons :

$$d_{n,p} = \sum_{i_1+\cdots+i_n=p} b_{i_1} \cdots b_{i_n},$$
$$u_{n,p} = a_n d_{n,p} \zeta^p,$$

donc $\left|u_{n,p}\right| = |a_n||e_{n,p}||\zeta|^p$. On a alors :

$$g(\zeta)^n = \sum_{p=0}^{\infty} d_{n,p} \zeta^p,$$
$$f(g(\zeta)) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} a_n d_{n,p} \zeta^p = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{n,p}.$$

D'après l'hypothèse $|\zeta| \leq \alpha$:

$$|g(\zeta)^n| \leq \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{i_1+\cdots+i_n=p} |b_{i_1}| \cdots |b_{i_n}||\zeta|^p \leq \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{i_1+\cdots+i_n=p} |b_{i_1}| \cdots |b_{i_n}| \alpha^p = G(\alpha)^n.$$

Puisque $G(\alpha) < R$, la série $\sum |a_n| G(\alpha)^n$ est convergente. Il en est alors de même de $\sum a_n g(\zeta)^n$, car $|a_n||g(\zeta)|^n$ converge par majoration de séries positives. Par construction $\sum a_n g(\zeta)^n$ converge vers $f(g(\zeta))$.

On peut alors écrire, d'après le théorème d'interversion 3.IV.19 ou de Fubini discret :

$$f(g(\zeta)) = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_n d_{n,p}\zeta^p.$$

ce qui exprime bien $f(g(\zeta))$ comme somme d'une série entière, en posant $c_p = \sum_{n=0}^{\infty} a_n d_{n,p}$ ce qui correspond à écrire $f(g(\zeta)) = \sum_{p=0}^{\infty} c_p \zeta^p$. □

3.VII.C. Inverse d'une série. —

Proposition 3.VII.3. — *Soit $\sum c_n z^n$ une série entière, de rayon de convergence $R > 0$ et avec $c_0 \neq 0$. Alors il existe une série entière $\sum d_n z^n$ de rayon de convergence $S > 0$ telle que, pour tout $\zeta \in \mathbb{C}$ avec $|\zeta| < \min(R,S)$, on ait :*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} d_n \zeta^n\right) = 1.$$

Démonstration. — Soit $h(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n$ pour $|\zeta| < R$. Posons :

$$g(\zeta) = 1 - \frac{1}{c_0}h(\zeta) = -\frac{1}{c_0}\sum_{n=1}^{\infty} c_n \zeta^n,$$

donc :

$$h(\zeta) = c_0(1 - g(\zeta)).$$

L'inverse de $h(\zeta)$ peut alors s'écrire :

$$\frac{1}{h(\zeta)} = \frac{1}{c_0}\frac{1}{1-g(\zeta)}.$$

On considère alors la série entière $\frac{1}{c_0}\sum z^n$, de rayon de convergence 1, et de somme $1/c_0$ en 0. La fonction f somme de cette série est:

$$f(\zeta) = \frac{1}{c_0}\frac{1}{1-\zeta} = \frac{1}{c_0}\sum_{n=0}^{\infty}\zeta^n.$$

Nous pouvons écrire :

$$\frac{1}{h(\zeta)} = \frac{1}{c_0}\frac{1}{1-g(\zeta)} = f(g(\zeta)).$$

D'après le théorème sur la composition de séries entières, on cherche $\alpha \in]0,R[$ tel que :

$$\frac{1}{|c_0|}\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|\alpha^n < 1.$$

Posons $G(z) = 1/|c_0|\sum_{n=1}^{\infty}|c_n||z^n$, et remarquons que $G(z)$ est continue sur $D(0,R)$ avec $G(0) = 0$. Il existe alors $\alpha > 0$ tel que $|G(\alpha)| < 1$. Le théorème sur la composition de séries entières s'applique et dit que :

$$\frac{1}{h(\zeta)} = f(g(\zeta)) = \frac{1}{c_0}\sum_{n=0}^{\infty} g(\zeta)^n$$

est somme d'une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$ de rayon de convergence $S \geq \alpha > 0$. □

Exercice 1. — On obtient les développements :

$$\frac{1}{az+b} = \frac{1}{b}\frac{1}{1+\frac{a}{b}z} = \frac{1}{b}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-a}{b}\right)^n z^n, \qquad R = \frac{|b|}{|a|}.$$

$$\frac{1}{1-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}, \qquad R = 1.$$

3.VII.D. Fractions rationnelles. — Soit P, Q polynômes à coefficients complexes en la variable X, avec $Q \neq 0$ et considérons la fonction

$$f(\zeta) = \frac{P(\zeta)}{Q(\zeta)},$$

dont le domaine de définition est $P = \mathbb{C}\setminus Z(Q)$, où $Z(Q) = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid Q(\zeta) = 0\}$ est l'ensemble des racines de Q. Le théorème de d'Alembert-Gauss affirme que l'on peut écrire :

$$Q(X) = a\prod_{i=1}^{d}(X-\alpha_i)^{r_i},$$

pour certains $r_i > 0$ entiers et où $Z(Q) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$.

Théorème 3.VII.4. — *Il existe uniques un polynôme F et $a_{i,j} \in \mathbb{C}$ pour $i \in \{1,\ldots,n\}$ et $j \in \{1,\ldots,n_i\}$ tels que :*

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = F(X) + \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{a_{i,j}}{(X-\alpha_i)^j}.$$

Si $\alpha_i \neq 0$ pour tout i, alors la fonction f est développable en série entière autour de 0 avec un rayon de convergence égal à $\min\{|\alpha_i| \big| i = 1,\ldots,n\}$, le développement étant donné comme somme de F et des développements de $a_{i,j}/(\zeta-\alpha_i)^j$.

La récette pour développer f en série entière est donc la suivante :

— Utiliser que, pour $\zeta \in D(0,1)$ et r entier positif on a :

$$\frac{1}{(1-\zeta)^r} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+r-1}{r-1}\zeta^n.$$

— Déduir que, pour $\zeta \in D(0,|\alpha|)$, on a :

$$\frac{1}{(\zeta-\alpha)^r} = (-1)^r\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\binom{n+r-1}{r-1}}{\alpha^{r+n}}\zeta^n.$$

— Écrire $F = \sum b_n X^n$ puis pour $\zeta \in D(0,R)$:

$$f(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{g(\zeta)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(b_n + \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{n_i}(-1)^j a_{i,j}\frac{\binom{n+j-1}{j-1}}{\alpha_i^{j+n}}\right)\zeta^n.$$

La démonstration du premier énoncé de ce théorème relève de l'algèbre et ne sera pas proposée ici. Par contre, pour ce qui concerne l'énoncé sur le développement de f, tout découle des propriétés que nous avons déjà analysées des rayons de convergence des séries entières et de la sommation et unicité des développements en série.

3.VIII. La fonction exponentielle complexe

Considérons la série entière exponentielle, de rayon de convergence infini :

$$e^z = \exp(z) = \sum_{n\geq 0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

3.VIII.A. Propriétés de base. —

Théorème 3.VIII.1. — *La fonction exponentielle complexe est indéfiniment $\mathbb{C}$-dérivable sur $\mathbb{C}$, prend valeurs dans $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ et pour tout $z, w \in \mathbb{C}$ nous avons :*

$$e^{z+w} = e^z e^w, \qquad e^{-z} = \frac{1}{e^z}.$$

De plus, la fonction exp *est indéfiniment $\mathbb{C}$-dérivable sur $\mathbb{C}$ et pour tout $k \geq 1$ sa dérivée d'ordre k est la fonction* exp *elle même.*

Démonstration. — Soient $z, w \in \mathbb{C}$. Calculons $e^z e^w$:

$$\begin{aligned} e^z e^w &= \left(\sum_{n\geq 0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n\geq 0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}\right) = \sum_{n\geq 0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\frac{w^{n-k}}{(n-k)!} = \\ &= \sum_{n\geq 0}^{\infty} \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k w^{n-k} = \sum_{n\geq 0}^{\infty} \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \\ &= \sum_{n\geq 0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z+w)^n = e^{z+w}. \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour n'importe quel $z, w \in \mathbb{C}$, on peut prendre $w = -z$ et remarquer $e^0 = 0$ pour avoir $e^z e^{-z} = 1$ donc $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$.

La dérivabilité est claire puisque notre série converge sur $\mathbb{C}$, et la dérivée coïncide avec exp simplement en regardant les coefficients de la série dérivée. □

3.VIII.B. Exponentielle réelle. —

Théorème 3.VIII.2. — *L'exponentielle réelle est un isomorphisme de groupes :*

$$\exp : (\mathbb{R}, +, 0) \to (\mathbb{R}_{>0}, \cdot, 1).$$

Démonstration. — Il est clair que l'exponentielle complexe se restreint à une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, dont la dérivée est la fonction même. Il est aussi évident que $e^r > 0$, quel que soit $r \geq 0$. Donc d'après la relation $e^{-r} = \frac{1}{e^r}$ on voit que $e^{-r} > 0$ aussi pour tout $r \geq 0$. Donc exp est une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_{>0}$, qui est un morphisme du groupe $(\mathbb{R}, +, 0)$ vers $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot, 1)$ d'après les relations multiplicatives du théorème 3.VIII.1.

De plus, l'exponentielle réelle est strictement croissante (donc injective) puisque sa dérivée est partout strictement positive. On a alors :

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty.$$

On en déduit que, pour tout $y > 1$, il existe $x \in \mathbb{R}$ satisfaisant à $e^x > y$, donc par les valeurs intermédiaires on voit que y admet un antécédent par rapport à l'exponentielle : c'est le logarithme naturel de y. Au passage, ceci définit le nombre de Néper $e = e^1$ et la fonction logarithme naturel ou népérien. Celle-ci est donc une application bijective indéfiniment dérivable $(\mathbb{R}_{>0},+,1)\to(\mathbb{R},+,0)$. □

3.VIII.C. Exponentielle complexe et trigonométrie. —

Définition 3.VIII.3. — On définit le sinus et cosinus d'un réel y par :

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y.$$

Théorème 3.VIII.4. — *L'exponentielle donne un morphisme de groupes surjectif :*

$$\begin{aligned}(\mathbb{R},+,0)&\to(U,\cdot,1)\\ y&\mapsto e^{iy}=\cos y+i\sin y,\end{aligned}$$

ou U est le cercle unitaire :

$$U=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\},$$

et $\mathbb{R}$ est l'axe $i\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$. Le noyau de ce morphisme est $2\pi i\mathbb{Z}$.

Démonstration. — D'abord, par séparation des parties réelle et imaginaire, de la relation $(e^{ix})'=ie^{ix}$ on déduit les relations classiques :

$$\cos' x=-\sin x,\qquad \sin' x=\cos x.$$

De la relation $e^{ix}e^{-ix}=1$ on déduit :

$$\cos^2 x+\sin^2 x=1.$$

On a $\cos(0)=1$, donc $\cos x>0$ pour tous les x dans un voisinage suffisamment petit de 0. Par contre, il existe bien des réels x tels que $\cos x=0$. Autrement, on aurait $\cos x>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, donc $\sin x$ strictement croissante sur $\mathbb{R}_{>0}$, donc strictement positive sur $\mathbb{R}_{>0}$. Ainsi, on pose :

$$\begin{aligned}g:]x,+\infty[&\to\mathbb{R}\\ y&\mapsto g(y)=\cos y+y\sin x.\end{aligned}$$

On aurait alors g indéfiniment dérivable et :

$$g'(y)=-\sin y+\sin x<0,$$

puisque sin est strictement croissante et $x<y$. Mais $\sin x>0$ et $|\cos y|\leq 1$ donc :

$$\lim_{y\to+\infty} g(y)=+\infty,$$

ce qui est une contradiction.

On définit alors π comme le double de la borne inférieure de l'ensemble des zéros de la fonction cosinus, restreinte à $]0,+\infty[\to\mathbb{R}$. On a alors :

$$\cos(\pi/2)=0.$$

En effet, comme $\pi/2$ est la borne inférieure de l'ensemble X des zéros de cos, pour tout $n\in\mathbb{N}$ on peut trouver un élément $u_n\in X$ tel que $\pi/2<u_n<\pi_2+1/n$. Donc évidemment la suite (u_n) tend vers $\pi/2$, et comme $\cos(u_n)=0$ pour tout u_n on a aussi $\cos(\pi/2)=0$ par continuité. Ainsi :

$$\sin(\pi/2)=,1$$

parce que cos est positive sur $[0,\pi/2[$, donc sin est croissante sur cet intervalle dons $\sin(\pi/2)>0$. On en obtient la formule légendaire de Gauss :

$$e^{\pi i}=-1.$$

Il s'en suit que, pour tout $k\in\mathbb{Z}$, on a :

$$e^{i(x+2k\pi)}=e^{ix},$$

donc l'exponentielle est périodique de période $2\pi i$. L'affirmation sur le noyau de l'exponentielle unitaire s'ensuit. Il est aussi clair par les valeurs intermédiaires que $\sin x$ prend toutes les valeurs entre -1, et de même pour cos. Donc un point $w\in U$ s'écrit (a,b) avec $a^2+b^2=1$. Supposons $a,b\geq 0$. Il existe alors $x\in[0,\pi/2]$. De plus, $\sin x^2=b^2$ par soustraction de $a^2=\cos^2 x$ de 1. Ainsi $\sin x=\pm b$, mais $\sin x\geq 0$ pour $x\in[0,\pi/2]$. Quant aux valeurs (a,b) pas forcément positives, on peut procéder par symétrie. □

3.VIII.D. Interprétation algébrique. —

Théorème 3.VIII.5. — *L'exponentielle* exp : $\mathbb{C}\to\mathbb{C}^*$ *est un morphisme surjectif de groupes* $(\mathbb{C},+,0)\to(\mathbb{C},\cdot,1)$ *dont le noyau est* $2i\pi\mathbb{Z}$.

Démonstration. — Il est clair que exp est un morphisme de groupes. En écrivant $z=x+iy$, on voit que :

$$e^z=e^xe^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y).$$

On voit alors que l'exponentielle est surjective. En effet, étant donné $w\in\mathbb{C}^*$, on écrira $w=|w|\frac{w}{|w|}$. Or $\frac{w}{|w|}\in U$ donc il existe $y\in\mathbb{R}$ tel que $(\cos y+i\sin y)=\frac{w}{|w|}$; de plus bien sûr il existe $x\in\mathbb{R}$ tel que $e^x=|w|$. Donc en posant $z=x+iy$ on obtient $e^z=w$.

Ainsi l'exponentielle est surjective. Pour voir quelle est le noyau, on se demande pour quels $z\in\mathbb{C}$ a-t-on $e^z=1$. Si on écrit $z=x+iy$, on voir que $e^x=1$ et $(\cos y+i\sin y)=1$, donc $x=0$ et $y\in 2\pi i\mathbb{Z}$. □

CHAPITRE 4

L'INTÉGRALE DE RIEMANN

4.I. Fonctions intégrables au sens de Riemann

4.I.A. Fonctions en escalier. — La notion d'intégrabilité au sens de Riemann repose sur le procédé d'approximation d'une fonction par des fonctions constantes par morceaux, que l'on appelle fonctions en escalier.

4.I.A.1. Fonctions en escalier et subdivisions. — Une fonction est en escalier sur un invervalle $I = [a,b]$ si elle est constante par morceaux, les morceaux en question étant définis à partir d'une subdivision de I en sous intervalles.

Définition 4.I.1. — Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Une *subdivision* de $[a,b]$ est une liste ordonnée de nombres $\sigma = (x_0,\dots,x_n)$, avec $x_i \in \mathbb{R}$ et :

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

On appelle n la longueur de la subdivision. On peut donner la même définition de subdivision lorsque I n'est pas fermé (comme subdivision de la clôture), ou pas minoré (en supprimant la condition $x_0 = a$) ou pas majoré (en supprimant la condition $x_n = b$).

Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction g sur $[a,b]$ est dite *en escalier* s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0,\dots,x_n)$ et des constantes $(m_1,\dots,m_n)$ telles que g soit de la forme :

$$g(x) = m_i, \qquad \forall x \in]x_{i-1}, x_i[.$$

4.I.A.2. Intégrale de fonctions en escalier. — L'*intégrale* de g sur la subdivision σ est définie de la manière suivante :

$$I(g,\sigma) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}).$$

On peut montrer que cette valeur ne dépend que de g, et non de la subdivision σ de g choisie. On note alors :

$$\int_a^b g(t)dt = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}).$$

Preuve que l'intégrale ne dépend pas de la subdivision. — Soit σ' obtenue de σ en ajoutant un seul point, i.e.:

$$\sigma' = a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < y < x_i < \cdots < x_n = b.$$

Comme $g(x) = m_i$ pour tout $x \in]x_{i-1}, x_i[$, on a $g(x) = m_i$ pour tout $x \in]x_{i-1}, y[$ et aussi pour tout $x \in]y, x_i[$. De ce fait, on a que $m_i(x_i - y) + m_i(y - x_{i-1}) = m_i(x_i - x_{i-1})$ donne :

$$I(g,\sigma) = I(g,\sigma').$$

Maintenant, il est clair que toute subdivision σ' plus fine que σ s'obtient de σ par un nombre fini d'ajouts d'un point à la subdivision, ce qui ne change jamais l'intégrale. On a alors l'indépendance de l'intégrale par raffinement de la subdivision.

Pour terminer la preuve, étant données deux subdivisions quelconque, on considère leur réunion, qui constitue un raffinement des deux subdivisions à la fois. Comme l'intégrale sur la réunion est égale aux deux intégrales d'après l'indépendance par raffinement, on voit que les deux intégrales sur les subdivisions de départ sont égales. □

4.I.A.3. Propriété de l'intégrale d'une fonction en escalier. — Nous allons utiliser la linéarité et la croissance de l'intégrale pour fonctions intégrables. Celles-ci découlent de la linéarité et de la croissance de l'intégrale pour les fonctions en escalier.

Proposition 4.I.2. — *Soit g et h fonctions en escalier sur un intervalle $[a,b]$. Alors pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\int_a^b (\lambda g(t) + \mu h(t)) dt = \lambda \int_a^b g(t) dt + \mu \int_a^b h(t) dt.$$

Si $g \leq h$, alors :

$$\int_a^b g(t) dt \leq \int_a^b h(t) dt.$$

Démonstration. — On se place sur une subdivisons qui raffine à la fois celle de g et celle de h, par exemple leur réunion. Le résultat sur la linéarité est alors évident.

Pour la majoration, on observe d'abord que si f est en escalier et positive, alors son intégrale est positive; ce qui est évident. Pour conclure, on considère $f = h - g$ et on utilise la linéarité. □

4.I.B. Fonctions intégrables. —

4.I.B.1. Fonctions intégrables et fonctions en escalier. — Nous donnons la définitions de fonction intégrable au sens de Riemann (nous dirons simplement "intégrable") en termes de fonctions en escalier encadrant f.

Définition 4.I.3. — Soit f une fonction de variable réelle, définie sur un intervalle compact $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. On dit que *f est intégrable* (au sens de Riemann) sur $[a,b]$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe g, h fonctions en escalier sur $[a,b]$, avec $g \leq f \leq h$ et :

$$\int_a^b h(t) dt - \int_a^b g(t) dt < \varepsilon.$$

Bien sûr, si $g \leq h$ alors $\int_q^b g(t)dt \leq \int_q^b h(t)dt$ par construction, donc la quantité à majorer par ε est non négative.

Il est clair aussi qu'une fonction intégrable sur un intervalle compact est bornée, puisqu'elle doit être majorée et minorée par des fonctions en escaliers, qui sont bornées.

***Exemple 4.I.4* (Une fonction non intégrable).** — Soit f la fonction définie sur $[0,1] \subset \mathbb{R}$ qui vaut 0 sur les rationnels et 1 sur les irrationnels. Alors $g = 0$ est le plus grand minorant en escalier de f, et $h = 1$ en est le plus grand majorant en escalier. Mais :

$$\int_0^1 g(t)dt = 0, \qquad \int_0^1 h(t)dt = 1,$$

donc $\int_0^1 h(t)dt - \int_0^1 g(t)dt \geq 1$.

4.I.B.2. Intégrale supérieure et inférieure. —

Définition 4.I.5. — Soit f une fonction de variable réelle, définie et bornée sur un intervalle compact $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. On note :

$$\mathscr{E}_-(f) = \{g \text{ fonction en escalier sur } [a,b] \mid g(x) \leq f(x), \forall x \in [a,b]\}.$$
$$\mathscr{E}_+(f) = \{h \text{ fonction en escalier sur } [a,b] \mid h(x) \geq f(x), \forall x \in [a,b]\}.$$

Le premier de ces deux ensembles est non vide puisque f est minorée; le deuxième l'est aussi car f est majorée. On définit alors les intégrales *inférieure* et *supérieure* de f :

$$I_-(f) = \sup_{g \in \mathscr{E}_-(f)} \int_a^b g(t)dt.$$
$$I_+(f) = \inf_{h \in \mathscr{E}_+(f)} \int_a^b h(t)dt.$$

Le prochain résultat montre que cette définition est bien posée et que les deux intégrales, inférieure et supérieure, coïncident si et seulement si f est intégrable. Dans ce cas on définit $\int_I f$ comme la valeur de l'intégrale inférieure et supérieure.

Théorème 4.I.6. — *Pour qu'une fonction bornée définie sur un intervalle compact de $\mathbb{R}$ soit intégrable, il faut et il suffit que $I_-(f) = I_+(f)$. Dans ce cas on pose :*

$$\int_a^b f(t)dt = I_-(f) = I_+(f).$$

Démonstration. — Soit f majorée par v et minorée par u sur $[a,b]$. Posons :

$$X_- = \left\{ \int_a^b g(t)dt \mid g \in \mathscr{E}_-(f) \right\},$$
$$X_+ = \left\{ \int_a^b h(t)dt \mid h \in \mathscr{E}_+(f) \right\}.$$

Il est clair que tout élément de X_+ est un majorant de X_- et que tout élément de X_- est un minorant de X_+. De plus, $(b-a)u$ appartient à X_- et $(b-a)v$ appartient à X_+. Les deux nombres $I_-(f)$ et $I_+(f)$ existent donc finis et $I_-(f) \leq I_+(f)$.

Revenons à la preuve. Soit f intégrable et fixons $\varepsilon > 0$. Il existent alors $x_- \in X_-$ et $x_+ \in X_+$ tels que $x_+ - x_- < \varepsilon$. On a donc :

$$0 \leq I_+(f) - I_-(f) \leq x_+ - x_- < \varepsilon,$$

donc :

$$I_+(f) = I_-(f).$$

Réciproquement, si $I_+(f) = I_-(f)$, écrivons $a = I_+(f) = I_-(f)$. D'après les propriétés des bornes inférieure et supérieure, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe alors $x_+ \in X_+$ et $x_- \in X_-$ tels que :

$$x_+ < a + \frac{\varepsilon}{2}, \qquad x_- > a - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc :

$$x_+ - x_- < a + \frac{\varepsilon}{2} - \left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon.$$

□

Remarque 4.I.7. — Si $f_1 \leq f_2$ sont intégrables sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f_1(t)dt \leq \int_a^b f_2(t)dt$.

Démonstration. — C'est clair, puisque $\mathscr{E}_-(f_1) \subset \mathscr{E}_-(f_2)$. □

4.I.C. Suites associées. — Une façon équivalente de définir la notion d'intégrabilité d'une fonction f est par l'existence d'une suite de fonctions en escalier (φ_n) qui encadre f, avec l'étendue de l'encadrement (ϑ_n) convergent vers 0 en intégrale.

Définition 4.I.8. — Soit f une fonction définie sur un intervalle compact $[a,b]$. Une paire de suites de fonctions en escalier (φ_n, ϑ_n) est *une suite associée* à f si :

i) pour tout point x de $[a,b]$ on a $|f(x) - \varphi_n(x)| \leq \vartheta_n(x)$;

ii) on a $\lim_{n\to\infty} \int_a^b \vartheta_n(t)dt = 0$.

Théorème 4.I.9. — *Une fonction f bornée sur un intervalle compact $[a,b]$ y est intégrable si et seulement si elle possède une suite associée (φ_n, ϑ_n). Dans ce cas on a :*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

Démonstration. — Soit f intégrable. Pour tout n entier non nul, il existe alors deux fonctions en escalier g_n et h_n telles que :

$$g_n \leq f \leq h_n, \qquad \text{sur } [a,b] \qquad \text{et :} \qquad \int_a^b h_n(t)dt - \int_a^b g_n(t)dt < \frac{1}{n}.$$

On pose alors :

$$\vartheta_n = \frac{h_n - g_n}{2}, \qquad \varphi_n = \frac{h_n + g_n}{2}.$$

Remarquons que ceci est équivalent aux relations :

$$h_n = \varphi_n + \vartheta_n, \qquad g_n = \varphi_n - \vartheta_n.$$

On trouve donc :

$$\varphi_n - \vartheta_n = g_n \le f \le h_n = \vartheta_n + \varphi_n, \qquad \vartheta_n \ge 0.$$

Ceci veut dire :

$$\left| f - \varphi_n \right| \le \vartheta_n.$$

De plus, on voit :

$$\int_a^b \vartheta_n(t)dt = \frac{1}{2}\int_a^b g_n(t)dt - \frac{1}{2}\int_a^b h_n(t)dt < \frac{1}{2n}.$$

Réciproquement, si on part de (φ_n, ϑ_n), pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N tel que $\int_a^b \vartheta_n(t)dt < \varepsilon/2$, quel que soit $n \ge N$. Si on pose $h_n = \varphi_n + \vartheta_n$ et $g_n = \varphi_n - \vartheta_n$, de $|f - \varphi_n| \le \vartheta_n$ on déduit $g_n \le f \le h_n$. De plus, on trouve :

$$\int_a^b h_n(t)dt - \int_a^b g_n(t)dt = 2\int_a^b \vartheta_n(t)dt < \varepsilon.$$

Pour l'égalité des intégrales, on écrit $\varphi_n - \vartheta_n \le f \le \varphi_n + \vartheta_n$, donc :

$$\int_a^b \varphi_n(t)dt - \int_a^b \vartheta_n(t)dt \le \int_a^b f(t)dt \le \int_a^b \varphi_n(t)dt + \int_a^b \vartheta_n(t)dt,$$

et on conclut, comme $\lim_{n\to\infty} \int_a^b \vartheta_n(t)dt = 0$, que $\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$. □

4.II. Classes de fonctions intégrables

4.II.A. Intégrabilité des fonctions monotones. —

Théorème 4.II.1. — *Une fonction monotone sur un intervalle compact y est intégrable.*

Démonstration. — Soit $[a,b]$ l'intervalle en question et f monotone sur $[a,b]$, disons f croissante. Soit n un entier. Pour avoir une subdivision de longueur n d'étendue constante $[a,b]$, on pose :

$$\begin{aligned} &\delta = \frac{b-a}{n}, \\ &x_k = a + k\delta, \qquad\qquad k = 0,\dots,n. \end{aligned}$$

Nous définissons alors les fonctions en escalier g et h en posant, pour tout $x \in [x_k, x_{k+1}[$:

$$g(x) = f(x_k), \qquad\qquad h(x) = f(x_{k+1}),$$

et $g(b) = f(b) = h(b)$. Par monotonie de f, on a alors $g \le f \le h$ sur $[a,b]$. De plus :

$$\begin{aligned} \int_a^b h(t)dt - \int_a^b g(t)dt &= \sum_{i=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)(f(x_{k+1}) - f(x_k)) = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}(f(x_{k+1}) - f(x_k))\delta = (f(b) - f(a))\frac{b-a}{n}. \end{aligned}$$

Il suffit de choisir n assez grand pour que le nombre $(f(b) - f(a))\frac{b-a}{n}$ soit inférieur à ε, et on aura l'intégrabilité de f. □

4.II.B. Intégrabilité des fonctions continues, continuité uniforme. —

4.II.B.1. Continuité uniforme. —

Définition 4.II.2. — Soit f une fonction de variable réelle à valeurs réels ou complexes, définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que f est *uniformément continue* sur I si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x, y \in I$, on ait :

$$|x-y| < \delta \Rightarrow \left|f(x)-f(y)\right| < \varepsilon.$$

Remarque 4.II.3. — La définition de continuité uniforme sur I diffère par celle de continuité en tout point de I uniquement par une interversion de quantificateurs. On voit alors immédiatement que, si f est uniformément continue sur I, alors elle est continue en tout point x de I.

4.II.B.2. Théorème de Heine. —

Théorème 4.II.4. — *Soit f une fonction continue sur un intervalle compact P de $\mathbb{R}$. Alors f est uniformément continue sur P.*

Démonstration. — Soit f continue sur $P = [a, b]$. Montrons par l'absurde que f est uniformément continue sur P. Supposons donc qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\delta > 0$, on puisse trouver $x, y \in P$ tels que $|x-y| < \delta$ et $|f(x)-f(y)| \geq \varepsilon$, et montrons que ceci conduit à un absurde.

Étant donné un tel $\varepsilon > 0$, choisissons $\delta = 1/n$ pour tout n entier positif. On en déduit l'existence de $(x_n, y_n) \in P \times P$ tels que :

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n}, \qquad |f(x_n)-f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

On applique le théorème de Bolzano-Weierstrass à $(x_n) \subset P$. Il existe alors une suite extraite (x_{n_k}) conergente vers un point $x \in P$. De même, il existe une suite extraite $(y_{n_{k_j}})$ de (y_{n_k}) convergente vers un point $y \in P$. On sait aussi que $(x_{n_{k_j}})$ converge vers x en tant que suite extraite de (x_{n_k}).

Par continuité de f en x et y, on a :

$$\lim_{j\to\infty} f(x_{n_{k_j}}) = f(x), \qquad \lim_{j\to\infty} f(y_{n_{k_j}}) = f(y).$$

On voit facilement que $n_{k_j} \geq n$ donc :

$$|x_{n_{k_j}} - y_{n_{k_j}}| < \frac{1}{n}, \qquad |f(x_{n_{k_j}})-f(y_{n_{k_j}})| \geq \varepsilon.$$

Ainsi, il est clair que :

$$\lim_{j\to\infty} |x_{n_{k_j}} - y_{n_{k_j}}| = 0,$$

i. e. $x = y$, et :

$$\lim |f(x_{n_{k_j}})-f(y_{n_{k_j}})| = |f(x)-f(y)| \geq \varepsilon.$$

Mais, comme $x = y$, on a $|f(x)-f(y)| = 0 \geq \varepsilon$, ce qui contredit $\varepsilon > 0$. □

4.II.B.3. Intégrabilité des fonctions uniformément continues. —

Théorème 4.II.5. *— Une fonction continue sur un intervalle compact est intégrable.*

Démonstration. — Fixons $\varepsilon > 0$ et soit $[a, b]$ l'intervalle en question. Bien sûr on peut supposer $b \neq a$. Choisissons un $\varepsilon' > 0$ tel que :

$$\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}.$$

On sait qu'une fonction f continue sur un intervalle compact est uniformément continue d'après le théorème de Heine. On peut alors trouver $\delta > 0$ tel que, pour tout $x, y \in [a, b]$, $|x - y| < \delta$ implique :

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon'.$$

Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, on peut trouver un enteir n assez grand pour que :

$$\frac{(b-a)\big|f(b)-f(a)\big|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{et} \qquad \gamma = \frac{b-a}{n} < \delta,$$

où nous avons posé $\gamma = (b-a)/n$. Prenons une subdivision régulière de notre intervalle $[a, b]$ de pas constant γ, i. e. $\sigma = (x_0 < \cdots < x_n)$ où $x_k = a + k\gamma$.

Définissons maintenant deux fonctions en escalier g et h qui encadrent f. Aux points $x_k = a + k\gamma$ de la subdivision, on pose $g(x_k) = f(x_k) = h(x_k)$. Sur les points x des intervalles ouverts $]x_{k-1}, x_k[$ pour $k = 1, \ldots, n$ on pose :

$$g(x) = f(x_{k-1}) - \varepsilon', \qquad h(x) = f(x_k) + \varepsilon'.$$

On a alors que $f \le h$, car $x \in [a, b]$ est soit l'un des x_k (auquel cas l'encadrement est évident) ou appartient à intervalle de la forme $]x_{k-1}, x_k[$, donc $|x - x_k| < \gamma < \delta$, ainsi :

$$f(x) \in]f(x_k) - \varepsilon', f(x_k) + \varepsilon'[\Rightarrow f(x) < h(x).$$

De même $|x - x_{k-1}| < \delta$ donc $|f(x) - f(x_{k-1})| < \varepsilon'$, en particulier $f(x) > f(x_{k-1}) - \varepsilon' = g(x)$.

Finalement, on calcule :

$$\begin{aligned}\int_a^b h(t)dt - \int_a^b g(t)dt &= \sum_{k=1}^{n} \gamma(f(x_k) - f(x_{k-1}) + 2\varepsilon') = \\ &= 2n\gamma\varepsilon' + \gamma(f(b) - f(a)) \le \\ &= 2n\gamma\varepsilon' + \gamma|f(b) - f(a)| \le \\ &< 2(b-a)\varepsilon' + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Ceci montre que f est intégrable. □

4.III. Propriétés fondamentales de l'intégrale de Riemann

4.III.A. Linéarité de l'intégrale. —

Proposition 4.III.1. — *Soit f et g fonctions intégrables (au sens de Riemann) sur un intervalle $[a,b]$, et soient $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. Alors $\lambda f+\mu g$ est intégrable et :*

$$\int_a^b(\lambda f+\mu g)(t)dt=\lambda\int_a^b f(t)dt+\mu\int_a^b g(t)dt.$$

Démonstration. — Soit (φ_n,ϑ_n) et (ψ_n,η_n) suites associées à f et g. Montrons que $(\lambda\varphi_n+\mu\psi_n,|\lambda|\vartheta_n+|\mu|\eta_n)$ est associée à $(\lambda f+\mu g)$. D'abord, on a :

$$|\lambda f+\mu g-(\lambda\varphi_n+\mu\psi_n)|\le|\lambda||f-\varphi_n|+|\mu||g-\psi_n|\le|\lambda|\vartheta_n+|\mu|\eta_n.$$

Ensuite, d'après les propriétés déjà montrées sur les fonctions en escaliers, on trouve :

$$\int_a^b\big(|\lambda|\vartheta_n(t)+|\mu|\eta_n(t)\big)dt=|\lambda|\int_a^b\vartheta_n(t)dt+|\mu|\int_a^b\eta_n(t)dt,$$

ce qui tend vers 0 lorsque n tend vers ∞. Ainsi $\lambda f+\mu g$ est intégrable sur $[a,b]$. Pour en calculer l'intégrale, on écrit alors :

$$\begin{aligned}\int_a^b(\lambda f+\mu g)(t)dt&=\lim_{n\to\infty}\int_a^b(\lambda\varphi_n+\mu\psi_n)(t)dt=\\&=\lambda\lim_{n\to\infty}\int_a^b\varphi_n(t)dt+\mu\lim_{n\to\infty}\int_a^b\psi_n(t)dt=\\&=\lambda\int_a^b f(t)dt+\mu\int_a^b g(t)dt.\end{aligned}$$

□

4.III.B. Croissance de l'intégrale. —

Proposition 4.III.2. — *Soit $f\le g$ intégrables sur un intervalle compact $[a,b]$. Alors :*

$$\int_a^b f(t)dt\le\int_a^b g(t)dt.$$

De plus, on a $|f|$ intégrable sur $[a,b]$ et :

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right|\le\int_a^b\big|f(t)\big|dt.$$

En particulier, si $|f|\le M$ sur $[a,b]$, alors :

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right|\le M(b-a).$$

Démonstration. — Nous avons déjà montré le premier énoncé dans la remarque 4.I.7.

On peut en fournir une deuxième preuve. Il suffit de montrer que, si $h\ge0$ est intégrable sur $[a,b]$, alors $\int_a^b h(t)dt\ge0$: en effet on pourra alors poser $h=g-f$ et l'énoncé suivra. Par contre, si $h\ge0$ son intégrale est évidemment supérieure ou égale à 0, la fonction 0 étant en escalier d'intégrale nulle.

Le dernier énoncé est aussi évident une fois montré le deuxième, on s'apprête donc à démontrer celui-ci. On prend alors (φ_n, ϑ_n) une suite associée à f et on considère $(|\varphi_n|, \vartheta_n)$. On a bien sûr :

$$\big||f| - |\varphi_n|\big| \leq \big|f - \varphi_n\big| \leq \vartheta_n,$$

donc $|f|$ est intégrable sur $[a, b]$. De plus, par continuité de la norme on a :

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\int_a^b \varphi_n(t)dt\right| \leq \lim_{n\to\infty}\int_a^b \big|\varphi_n(t)\big|dt = \int_a^b \big|f(t)\big|dt,$$

l'inégalité ne faisant intervenir que φ_n étant bien sûr justifiée pour des fonctions en escalier. □

4.III.B.1. Additivité de l'intégrale sur les intervalles. —

4.III.B.2. Relation de Chasles. —

Proposition 4.III.3. — *Soit f définie sur $[a, b]$. Alors on a f est intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si, pour tout $c \in]a, b[$, elle est intégrable sur $[a, c]$ et $[c, b]$ et dans ce cas on a :*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

Démonstration. — D'abord, l'égalité souhaitée est claire pour les fonctions en escalier. En effet, si g est une telle fonction sur $[a, b]$, bien évidemment les restrictions de f à $[a, c]$ et $[c, b]$ sont en escalier. De plus, étant donnée une subdivison de g, on pourra la raffiner à $\sigma = (x_0 < \cdots < x_n)$ avec $x_k = c$ pour un certain k et avec $g(x) = m_i$ pour $x \in]x_{i-1}, x_i[$. Donc :

$$\int_a^b g(x)dx = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^k m_i(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=k+1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) =$$
$$= \int_a^c g(x)dx + \int_c^b g(x)dx.$$

Soit f intégrable sur $[a, b]$ et soit (φ_n, ϑ_n) une suite associée à f. Alors les restrictions de φ_n et ϑ_n à $[a, c]$ et $[c, b]$ donnent deux suites de fonctions en escalier $(\varphi'_n, \vartheta'_n)$ et $(\varphi''_n, \vartheta''_n)$, satisfaisant à $|f - \varphi'_n| \leq \vartheta'_n$ sur $[a, c]$ et $|f - \varphi''_n| \leq \vartheta''_n$ sur $[c, b]$. De plus

$$0 = \lim_{n\to\infty}\int_a^b \vartheta_n(t)dt = \lim_{n\to\infty}\int_a^c \vartheta'_n(t)dt + \lim_{n\to\infty}\int_c^b \vartheta''_n(t)dt,$$

donc les deux limites, lorsque n tend vers ∞, de $\int_a^c \vartheta'_n(t)dt$ et $\int_c^b \vartheta''_n(t)dt$ sont nulles, en étant non négatives et leur somme étant nulle.

De plus en passant à la limite dans $\int_a^c \varphi_n(x)dx + \int_c^b \varphi_n(x)dx = \int_a^b \varphi_n(x)dx$ on obtient $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$.

On montre facilement la réciproque en considérant la réunion de deux suites associées à $f|_{[a,c]}$ et $f|_{[c,b]}$ comme une suite associée à f. □

4.III.B.3. Inversion des bornes. — En pose, lorsque $a < b$:

$$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt.$$

Proposition 4.III.4. — *Si $a, b, c \in \mathbb{R}$, et f est intégrable sur* $[\min(a,b,c), \max(a,b,c)]$, *alors on a :*

$$\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt.$$

4.III.B.4. Fonction d'intégrale nulle. —

Proposition 4.III.5. — *Pour qu'un fonction f continue et positive sur un intervalle compact ait intégrale nulle, il faut et il suffit que f soit nulle.*

Démonstration. — Évidemment si $f = 0$, l'intégrale de f vaut 0. En revanche, soit $[a, b]$ notre intervalle , si $f \neq 0$, disons $f(x_0) > 0$ pour un certain $x_0 \in [a, b]$ alors par continuité il existe un intervalle $[c, d]$, avec $c < d$, de sorte que $[c, d]$ soit contenu dans $[a, b]$ et contienne x_0, tel que $f(x) \geq N$, N étant un réel positif, et ce quel que soit $x \in [c, d]$. Ainsi :

$$\int_a^b f(t)dt \geq \int_c^d f(t)dt \geq \int_c^d N dt = N(d-c) > 0,$$

ce qui est absurde. □

4.III.C. Produit de fonctions intégrables, Cauchy-Schwarz. —

4.III.C.1. Produit de fonctions intégrables. —

Proposition 4.III.6. — *Soit f et g intégrables sur $[a, b]$. Alors fg l'est aussi.*

Démonstration. — Soit (φ_n, ϑ_n) suite associée à f et (ψ_n, η_n) suite associée à g. On sait que f est bornée sur $[a, b]$, disons par une constante M, et que g aussi est bornée disons par N. On peut supposer $\vartheta_n \leq M$ et $\eta_n \leq N$ pour tout entier n. En effet, si $\vartheta_n(x) > M$ on remplace $\vartheta_n(x)$ par $\tilde{\vartheta}_n(x) = M$ et $\varphi_n(x)$ par $\tilde{\varphi}_n(x) = 0$, et la suite ainsi obtenue continue d'être associée à f. Il est clair que, ϑ_n et φ_n étant en escalier, le remplacement ainsi fait intervient un nombre fini de fois et que les nouvelles fonctions $\tilde{\vartheta}_n$ et $\tilde{\varphi}_n$ sont encore en escalier. De plus bien sûr $|f - \varphi_n| \leq \vartheta_n$ continue d'être valide et $\tilde{\vartheta}_n$ est majorée par ϑ_n dont l'intégrale tendait vers 0: ceci arrive donc pour $\tilde{\vartheta}_n$ aussi.

De plus, en voit facilement que si $|\tilde{\eta}_n| \leq N$ alors $|g - \tilde{\psi}_n| \leq \tilde{\eta}_n$ implique $|\tilde{\psi}_n| \leq 2N$.

Avec cette hypothèse sur les suites associées, on peut construire une suite associée à fg, c'est-à-dire $(\varphi_n\psi_n, 2N\vartheta_n + M\eta_n)$. On a en effet :

$$\begin{aligned} |fg - \varphi_n\psi_n| &= |fg - f\psi_n + f\psi_n - \varphi_n\psi_n| \leq \\ &\leq |fg - f\psi_n| + |f\psi_n - \varphi_n\psi_n| = \\ &\leq |f||g - \psi_n| + |\psi_n||f - \varphi_n| \leq M\eta_n + 2N\vartheta_n. \end{aligned}$$

Il est clair aussi que :

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b (M\eta_n + 2N\vartheta_n)(t)dt = 0.$$

On a montré que fg est intégrable. □

4.III.C.2. Inégalités de Cauchy-Schwarz et Minkowski. — Soit $I = [a,b]$ un intervalle compact. On considère l'application Φ, définie sur l'espace E des fonctions intégrables au sens de Riemann sur $[a,b]$:

$$\Phi(f,g) = \int_a^b f(t)g(t)dt.$$

Cette fonction, une fois fixée g, est linéaire en f. De même en fixant g, la fonction $\Phi(g,f)$ de f est linéaire. De plus, on a bien sûr $\Phi(f,f) \geq 0$.

Théorème 4.III.7. — *Soit f,g intégrables sur $[a,b]$. Alors :*

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 \leq \int_a^b f^2(t)dt \int_a^b g^2(t)dt.$$

Démonstration. — Soit E l'espace vectoriel des fonctions intégrables sur $[a,b]$, donc $f,g \in E$ et $fg \in E$. On a, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq \Phi(\lambda f + g, \lambda f + g) = \lambda^2\Phi(f,f) + 2\lambda\Phi(f,g) + \Phi(g,g).$$

Supposons d'abord $\Phi(f,f) = 0$. Alors, pour que l'expression ci-dessus soit positive pour tout λ, il faut que $\Phi(f,g) = 0$, autrement l'expression changerait de signe en :

$$\lambda = -\frac{\Phi(g,g)}{2\Phi(f,g)}.$$

On trouve alors que $\int_a^b f^2(t)dt = 0$ implique $\int_a^b f(t)g(t)dt = 0$, donc Cauchy-Schwarz est vérifiée dans ce cas.

Supposons alors $\Phi(f,f) \neq 0$, c'est-à-dire $\Phi(f,f) > 0$. En raisonnant sur le discriminant du polynôme de degré 2 en λ, on voit que la condition de positivité écrite entraîne :

$$\Phi(f,g)^2 \leq \Phi(f,f)\Phi(g,g).$$

On écrit alors :

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 = \Phi(f,g)^2 \leq \Phi(f,f)\Phi(g,g) = \int_a^b f^2(t)dt \int_a^b g^2(t)dt.$$

□

4.IV. Intégrale indéfinie

4.IV.A. Théorème fondamental pour l'intégrale indéfinie. —

Définition 4.IV.1. — Soit f intégrable sur $[a,b]$ et $x \in [a,b]$. On définit alors la fonction intégrale indéfinie :

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

On appelle aussi F la *primitive basée en a* de f.

Théorème 4.IV.2. — *Soit f intégrable sur $[a,b]$, F sa primitive basée en a et $x_0 \in [a,b]$.*

i) Si $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell_+$, alors F est dérivable à droite en x_0 et sa dérivée à droite vaut ℓ^+.

ii) Si $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell_-$, F est dérivable à gauche en x_0 et sa dérivée à gauche vaut ℓ^-.

iii) Si f en continue en x_0, alors F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$.

Démonstration. — Supposons que ℓ^+ existe, donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, si $x_0 < t < x_0 + \delta$, alors $|f(t) - \ell_+| < \varepsilon$. Prenons alors $x \in]x_0, x_0 + \delta[$. Pour chacun des nombres $t \in]x_0, x]$ on retrouve $|f(t) - \ell_+| < \varepsilon$, donc :

$$\int_{x_0}^x |f(t) - \ell_+| dt \le \varepsilon(x - x_0).$$

On écrit alors :

$$\begin{aligned}
|F(x) - F(x_0) - (x - x_0)\ell_+| &= \left| \int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt - (x - x_0)\ell_+ \right| = \\
&= \left| \int_{x_0}^x f(t)dt - (x - x_0)\ell_+ \right| \le \\
&= \left| \int_{x_0}^x (f(t) - \ell_+)dt \right| \le \\
&\le \int_{x_0}^x \left| f(t) - \ell_+ \right| dt \le \varepsilon(x - x_0).
\end{aligned}$$

pour tout $x \in]x_0, x_0 + \delta[$. Ceci s'écrit aussi, pour les mêmes x :

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - \ell_+ \right| \le \varepsilon.$$

Cette inégalité montre bien que la dérivée à droite de F en x_0 vaut ℓ_+. L'énoncé sur la dérivée à gauche se démontre de la même manière. Celui qui concerne la dérivabilité tout court est une conséquence des autres deux. □

Définition 4.IV.3. — Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle *primitive* de f une quelconque fonction F, dérivable sur I, telle que, pour tout $x \in I$:

$$f(x) = F'(x).$$

Proposition 4.IV.4. — *Soit f continue sur un intervalle $[a,b]$. Alors, si F est une primitive de f sur $[a,b]$, on a la relation :*

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Démonstration. — Considérons la fonctions G définie par :

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

On sait que, puisque f est continue, G est une primitive de f, donc $G'(x) = f(x)$ quel que soit $x \in [a,b]$. De plus $G(a) = 0$. Alors $(F-G)' = 0$ sur $[a,b]$, $F-G$ est constante (dérivable sur $[a,b]$ de dérivée nulle donc constante, accroissements finis). Ainsi $F = G + F(a)$. Il s'en suit que $F(b) - F(a) = G(b) - G(a) = G(b) = \int_a^b f(t)dt$. □

4.IV.B. Intégration par parties. —

Proposition 4.IV.5. — *Soit f et g dérivables, à fonctions dérivées continues sur $P = [a,b]$. Alors on a :*

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = fg\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Démonstration. — Bien entendu, $f'g$ et gf' sont continues donc intégrables sur $[a,b]$. Donc $(fg)' = f'g + fg'$ entraîne :

$$fg\Big|_a^b = \int_a^b (fg)'(x)dx = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx,$$

ce qui équivaut au résultat. □

Évidemment on peut remplacer l'hypothèse f,g dérivables à fonctions dérivées continues par fg, $f'g$, fg' définies et intégrables sur $[a,b]$.

4.IV.C. Changement de variable. —

Théorème 4.IV.6. — *Soit φ une application dérivable sur un intervalle compact $I = [a,b]$. Supposons que φ' soit continue sur I. Soit f une fonction continue sur $\varphi(I)$. Alors $f \circ \varphi$ est intégrable sur I et :*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt = \int_a^b f(\varphi(s))\varphi'(s)ds.$$

Commençons par un petit lemme.

Lemme 4.IV.7. — *Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur un intervalle compact I. Alors $\varphi(I)$ est un intervalle compact de $\mathbb{R}$.*

Démonstration. — Montrons d'abord que φ est bornée. Si ce n'était pas le cas, on aurait pour tout $n \in \mathbb{N}$ un élément $x_n \in [a,b]$ tel que $|\varphi(x_n)| \geq n$. D'après Bolzano-Weierstrass on pourrait extraire de (x_n) une suite (x_{n_k}) convergente, donc bornée. Mais $|x_n| \geq n$ implique $|x_{n_k}| \geq n_k$, donc (x_{n_k}) ne peut être bornée : contradiction.

Soit alors M la borne supérieure des valeurs atteintes par φ, i. e. :

$$M = \sup\{\varphi(x) \mid x \in I\}.$$

On a $M \in \mathbb{R}$. Pour tout n entier positif, il existe x_n tel que $\varphi(x_n) > M - \frac{1}{n}$. Soit x le point limite d'une suite extraite convergente (x_{n_k}) de (x_n). Par continuité de φ:

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(x_{n_k}) = \varphi(x).$$

Il est alors clair que $\varphi(x) = M$. En effet, :

$$0 \leq \left|\varphi(x_{n_k}) - M\right| = M - \varphi(x_{n_k}) < \frac{1}{n_k},$$

donc :

$$0 \leq \lim_{k\to\infty} \left|\varphi(x_{n_k}) - M\right| = \lim_{k\to\infty} (M - \varphi(x_{n_k})) = M - \varphi(x) \leq \lim_{k\to\infty} \frac{1}{n_k} = 0.$$

On a montré que φ est bornée et atteint ses bornes, donc toute valeur intermédiaire est aussi atteinte d'après le théorème, justement, des valeurs intermédiaires. □

Démonstration du théorème. — Le lemme montre qu'il existe des réels $c \leq d$ tels que $\varphi([a,b]) = [c,d]$. On a f intégrable sur $[c,d]$ et, pour tout $x \in [a,b]$, la valeur $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(x)} f(t)dt$ est définie. On pose alors, pour $x \in [a,b]$ et $y \in [c,d]$:

$$F(x) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(x)} f(t)dt, \qquad H(y) = \int_{\varphi(a)}^{y} f(t)dt.$$

Il est clair alors que F et H sont des fonctions continues, F définie sur I, et H sur $\varphi(I)$, et $F = H \circ \varphi$. On définit aussi la fonction G, continue sur I:

$$G(x) = \int_a^x f(\varphi(s))\varphi'(s)ds.$$

On a :

$$H'(y) = f(y), \qquad G'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

Donc :

$$F'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x) = G'(x).$$

On conclut, puisque $F(a) = G(a)$, que $F = G$. □

4.V. Intégrale généralisée

Pour l'intégrale généralisée, nous traitons seulement le cas des intervalles infinis (en particulier pour une fonction de signe constant).

Définition 4.V.1. — Soit $a \in \mathbb{R}$ et f intégrable sur tout intervalle de la forme $[a, b]$, pour n'importe quel $b \geq a$ réel. Alors nous posons :

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{y\to\infty} \int_a^y f(t)dt.$$

Remarque 4.V.2. — Si $f \geq 0$, alors $F(y) = \int_a^y f(t)dt$ est croissante et $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ existe dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $F(y)$ est majorée. Ceci est équivalent aussi à ce que $(F(n))$ soit majorée.

Démonstration. — Soit $y_1 \geq y_2 \geq a$. Alors :

$$F(y_2) = \int_a^{y_2} f(t)dt = \int_a^{y_1} f(t)dt + \int_{y_1}^{y_2} f(t)dt \geq F(y_1),$$

donc F est croissante. Elle a donc une limite pour y qui tend vers l'infini si et seulement si elle majorée.

Bien sûr pour écrire $F(n)$ nous supposons $n \geq a$, ce qui arrive pour n suffisamment grand. Puis si $F(y)$ est majorée bien sûr $(F(n))$ est majorée. Par contre, si $(F(n))$ est majorée, alors il existe un majorant d tel que $F(n) \leq d$ pour tout n. Donc pour $y \geq a$, on a bien un $n \in \mathbb{N}$ tel que $y \leq n$ donc $F(y) \leq F(n) \leq d$. □

4.V.A. Comparaison entre séries et intégrales. —

Théorème 4.V.3. — *Soit (u_n) une suite numérique. Supposons que, pour $n \geq N$, on ait $u_n = f(n)$, avec f fonction positive décroissante de variable réelle, définie sur la demi-droite $[N, +\infty[$. Alors $\sum u_n$ est de même nature que $\int_N^{+\infty} f(t)dt$.*

Démonstration. — On peut supposer que $u_n = f(n)$ soit vrai à partir du premier rang, c'est-à-dire pour $N = 0$. Comme f est décroissante, on a pour tout n et tout $t \in [n, n+1]$:

$$f(n) \geq f(t) \geq f(n+1).$$

On peut alors écrire :

$$u_{n+1} = f(n+1) = f(n+1)\int_n^{n+1} dt \leq \int_n^{n+1} f(t)dt \leq \int_n^{n+1} f(t)dt = f(n) = u_n.$$

Par la règle de Chasles, on a alors :

$$s_{m+1} - u_0 = \sum_{n=0}^{m} u_{n+1} \leq \int_0^{m+1} f(t)dt \leq \sum_{n=0}^{m} u_n = s_m,$$

la suite (s_m) étant celle des sommes partielles de $\sum u_n$.

Maintenant, l'intégrale $\int_0^{m+1} f(t)dt$ est convergente si et seulement si $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est majorée, ce qui arrive si et seulement si la suite (v_m) définie par $v_m = \int_0^{m+1} f(t)dt$ est majorée. D'après l'encadrement $s_{m+1} - u_0 \leq v_m \leq s_m$, on voit que (v_m) est majorée si et seulement si (s_m) l'est, c'est à dire que $\sum u_n$ et $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ ont même nature. □

Corollaire 4.V.4. — *Si $u_n = f(n)$ est valide pour tout n et $\sum u_n$ converge, alors on a :*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \leq \int_0^{+\infty} f(t)dt \leq \sum_{n=0}^{\infty} u_n.$$

La série de Bertrand est un raffinement de la série de Riemann. Étant donnés deux deux réels α et β, on pose :

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}.$$

On parle alors de la série de Bertrand associée à (α, β).

Théorème 4.V.5. — *La série de Bertrand associée à (α, β) converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou alors $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.*

Démonstration. — Soit $\alpha > 1$. Posons $\gamma = \frac{\alpha-1}{2}$. On a facilement :

$$\begin{aligned} &\gamma + 1 > 1, \\ &\gamma + 1 - \alpha = -\gamma < 0. \end{aligned}$$

Ainsi, on trouve :

$$\frac{u_n}{n^{-\gamma-1}} = \frac{n^{\gamma+1}}{n^\alpha \ln(n)^\beta} = \frac{n^{-\gamma}}{\ln(n)^\beta},$$

ce qui tend clairement vers 0 lorsque n tend vers ∞. De plus, $\sum n^{-\gamma-1}$ converge d'après le théorème 2.II.8. Ainsi la convergence de la série de Bertrand pour $\alpha > 1$ est assurée par la remarque 2.II.5.

Si $\alpha < 1$, alors :

$$\frac{\frac{1}{n}}{u_n} = n^{\alpha-1} \ln(n)^\beta,$$

ce qui tend vers 0 lorsque n tend vers ∞. Donc, comme $\sum 1/n$ diverge, la série de Bertrand diverge aussi.

Soit enfin $\alpha = 1$. Si $\beta \leq 0$, alors :

$$u_n \geq \frac{1}{n},$$

ainsi la série de Bertrand diverge en vertu de la divergence de la série harmonique, cf. Exemple 2.I.12 et de la proposition 2.II.2.

Si par contre $\alpha = 1$ et $\beta > 0$ on considère la fonction f de variable réelle, définie, positive et décroissante sur $[2, +\infty[$:

$$f(x) = \frac{1}{x \ln(x)^\beta}.$$

Alors, d'après le théorème 4.V.3, $\sum u_n$ est de même nature que :

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{t \ln(t)^\beta} dt.$$

On calcule alors, par changement de variable $t = e^s$:

$$\int_2^x \frac{1}{t\ln(t)^\beta}\,dt = \int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{1}{s^\beta}\,ds.$$

Or si $\beta \neq 1$, cette intégrale se calcule de la façon suivante :

$$\int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{1}{s^\beta}\,ds = \left.\frac{s^{1-\beta}}{1-\beta}\right|_{s=\ln 2}^{s=\ln x}.$$

On voit alors que cette intégrale est définie si et seulement si $\beta > 1$. Par contre, si $\beta = 1$, on calcule :

$$\int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{1}{s}\,ds = \ln(s)\Big|_{s=\ln 2}^{s=\ln x} = \ln(\ln(x)) - \ln(\ln(2)),$$

ce qui diverge lorsque x tend vers l'infini. □

4.VI. Passage à la limite sous signe d'intégrale

Théorème 4.VI.1. — *Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables sur $I = [a,b]$, uniformément convergente vers f sur I. Alors f est intégrable sur I et :*

$$\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n.$$

Démonstration. — Soit $\varepsilon > 0$. On peut supposer $a < b$. Choisissons $\varepsilon' > 0$ avec :

$$\varepsilon' < \frac{b-a}{4}.$$

Il existe n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, on ait :

$$\sup_{x\in I} |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon'.$$

Maintenant, soit $n \geq n_0$ et utilisons que f_n est intégrable. Il existe alors $g \in \mathscr{E}_-(f_n)$ et $h \in \mathscr{E}_+(f_n)$ telles que $\int_I h - \int_I g < \varepsilon/2$.

Comme $\sup_{x\in I} |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon'$, sur I nous pouvons écrire :

$$g - \varepsilon' \leq f_n - \varepsilon' < f < f_n + \varepsilon' \leq h + \varepsilon'.$$

Ainsi $g - \varepsilon' \in \mathscr{E}_-(f)$ et $h + \varepsilon' \in \mathscr{E}_+(f)$. Finalement :

$$\int_I (h+\varepsilon') - \int_I (g-\varepsilon') = \int_I 2\varepsilon' + \int_I h - \int_I g < 2\varepsilon'(b-a) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Ceci montre que f est intégrable sur I.

De plus, des inégalités $f_n - \varepsilon' \leq f \leq f_n + \varepsilon'$ on obtient, pour tout $n \geq n_0$:

$$\int_I f_n - \varepsilon'(b-a) \leq \int_I f \leq \int_I f_n + \varepsilon'(b-a),$$

donc :

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n - \varepsilon'(b-a) \leq \int_I f \leq \lim_{n\to\infty} \int_I f_n + \varepsilon'(b-a).$$

Ceci étant valide pour n'importe quel $\varepsilon' > 0$, on obtient $\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n$. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

[LFA77] Jacqueline Lelong-Ferrand and Jean-Marie Arnaudiès, *Cours de mathématique, tome 2, analyse*, Dunod, Paris, 1977.