Calcul matriciel et systèmes linéaires

Exercice 1. Voici la liste des résultats.

1. $A+B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 9 \\ 5 & 7 & 12 \end{pmatrix}$.
2. $A+C$ impossible.
3. $A - C^T = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
4. AB impossible.
5. $AC = \begin{pmatrix} 34 & 24 \\ 68 & 74 \end{pmatrix}$.
6. $CA = \begin{pmatrix} 30 & 30 & 42 \\ 26 & 43 & 33 \\ 26 & 33 & 35 \end{pmatrix}$.
7. $BC = \begin{pmatrix} 29 & 18 \\ 44 & 31 \end{pmatrix}$.
8. $AX = \begin{pmatrix} 11 \\ 31 \end{pmatrix}$.
9. CX impossible.
10. $(A+B)C = \begin{pmatrix} 63 & 42 \\ 112 & 105 \end{pmatrix}$.
11. $A^T A = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 26 \\ 30 & 50 & 38 \\ 26 & 38 & 34 \end{pmatrix}$.
12. $AA^T = \begin{pmatrix} 14 & 30 \\ 30 & 90 \end{pmatrix}$.
13. A^2 impossible.
14. $M^2 = \begin{pmatrix} 26 & -35 \\ -14 & 19 \end{pmatrix}$.
15. $\frac{1}{2}M = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.
16. $LM = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
17. $ML = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
18. $L^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

19. $MN = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

20. $QR = \begin{pmatrix} 3 & 14 & 9 \\ 11 & 14 & 32 \\ 4 & 21 & 13 \end{pmatrix}$.

21. $RQ = \begin{pmatrix} 9 & 14 & 5 \\ 21 & 14 & 28 \\ 12 & 19 & 7 \end{pmatrix}$.

22. $QS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

23. $SQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

24. $SQX = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

25. $AQX = \begin{pmatrix} 72 \\ 216 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. Rappelons que :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

On a:

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}, \qquad A - B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$2A + 3B = \begin{pmatrix} 8 & 11 & -5 \\ 7 & 6 & 10 \\ 3 & 9 & 20 \end{pmatrix}, \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 2 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 22 \end{pmatrix},$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 6 & 11 & 0 \\ 6 & 9 & 11 \\ 7 & 9 & 17 \end{pmatrix}, \qquad AB = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 6 & 8 & 6 \\ 7 & 10 & 22 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 0 \\ 5 & 7 & 11 \\ 3 & 13 & 17 \end{pmatrix}.$$

$$(2A + 3B)^2 = \begin{pmatrix} 126 & 109 & -30 \\ 128 & 203 & 225 \\ 147 & 267 & 475 \end{pmatrix}, \qquad (A - B)(A + B) = \begin{pmatrix} -9 & -8 & -6 \\ -3 & 0 & -10 \\ 3 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Les deux façons d'écrire $(2A + 3B)^2$ sont:

$$(2A + 3B) = \begin{pmatrix} 8 & 11 & -5 \\ 7 & 6 & 10 \\ 3 & 9 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 11 & -5 \\ 7 & 6 & 10 \\ 3 & 9 & 20 \end{pmatrix},$$

et :

$$(2A+3B)^2 = 4A^2 + 6AB + 6BA + 9B^2 =$$
$$= 4\begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 2 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 22 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 6 & 8 & 6 \\ 7 & 10 & 22 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 8 & -1 & 0 \\ 5 & 7 & 11 \\ 3 & 13 & 17 \end{pmatrix} + 9\begin{pmatrix} 6 & 11 & 0 \\ 6 & 9 & 11 \\ 7 & 9 & 17 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

On calcule alors:

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 31 & 13 \\ 13 & 12 \end{pmatrix}$$
$$A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 10 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 10 & 3 & 2 & 34 \end{pmatrix}$$

Exercice 4. On multiplie la deuxième équation par 5 et on ajoute à la première, en obtenant, à gauche:

$$3A - 5B + 5 \times (2A + B) = 3A - 5B + 10A + 5B = 13A,$$

et à droite:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + 5 \times \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 7 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$$

On en obtient:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{14}{13} & \frac{7}{13} \\ \frac{4}{13} & -\frac{8}{13} \end{pmatrix}$$

Donc:

$$B = -2A + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{13} & -\frac{1}{13} \\ -\frac{8}{13} & -\frac{10}{13} \end{pmatrix}$$

Exercice 5. Calculons par différentes méthodes.

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Alors $\det(A) = 9 \times 2 - 4 \times 4 = 2$. Ensuite :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Alors :

$$\det(B) = 1 \times (2 \times 8 - 2 \times 0) - 9 \times (3 \times 8 - 0 \times 0) + 4 \times (3 \times 2 - 2 \times 0) = -176.$$

Pour C, on a :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 70 & 39 \\ 4 & 8 & 141 & 1024 \\ 1 & 2 & 35 & -1 \\ 2 & 5 & 70 & 38 \end{pmatrix}$$

On utilise Gauss. Donc:

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 & 70 & 39 \\ 0 & -2 & 1 & 946 \\ 1 & 2 & 35 & -1 \\ 2 & 5 & 70 & 38 \end{pmatrix}$$

Ensuite :

$$L_3 \leftarrow L_3 - (1/2)L_1 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 & 70 & 39 \\ 0 & -2 & 1 & 946 \\ 0 & -1/2 & 0 & -41/2 \\ 2 & 5 & 70 & 38 \end{pmatrix}$$

Puis :

$$L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 & 70 & 39 \\ 0 & -2 & 1 & 946 \\ 0 & -1/2 & 0 & -41/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Maintenant on s'aperçoit que

$$\det(C) = 2 \times (-1) \times \det \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix} = -2 \times (1/2) = -1.$$

Pour D on a :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 15 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 15 \\ 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 62 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 32 & 16 & 8 & 4 & 2 & 62 \end{pmatrix}$$

On utilise Gauss :

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 15 \\ 0 & -2 & -4 & -3 & -6 & -15 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 15 \\ 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 62 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 32 & 16 & 8 & 4 & 2 & 62 \end{pmatrix}$$

Puis :

$$L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 15 \\ 0 & -2 & -4 & -3 & -6 & -15 \\ 0 & -6 & -12 & -18 & -24 & -60 \\ 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 62 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 32 & 16 & 8 & 4 & 2 & 62 \end{pmatrix}$$

Puis :

$$L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 15 \\ 0 & -2 & -4 & -3 & -6 & -15 \\ 0 & -6 & -12 & -18 & -24 & -60 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 22 & 32 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 32 & 16 & 8 & 4 & 2 & 62 \end{pmatrix}$$

Puis :

$$L_5 \leftarrow L_5 - L_1 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 15 \\ 0 & -2 & -4 & -3 & -6 & -15 \\ 0 & -6 & -12 & -18 & -24 & -60 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 22 & 32 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -10 \\ 32 & 16 & 8 & 4 & 2 & 62 \end{pmatrix}$$

Puis :

$$L_6 \leftarrow L_6 - 32L_1 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 15 \\ 0 & -2 & -4 & -3 & -6 & -15 \\ 0 & -6 & -12 & -18 & -24 & -60 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 22 & 32 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -10 \\ 0 & -48 & -88 & -124 & -158 & -418 \end{pmatrix}$$

Puis pour la deuxième colonne :

$$L_3 \leftarrow L_2 - 3L_2 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 15 \\ 0 & -2 & -4 & -3 & -6 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & -6 & -15 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 22 & 32 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -10 \\ 0 & -48 & -88 & -124 & -158 & -418 \end{pmatrix}$$

Puis

$$L_5 \leftarrow L_2 - (1/2)L_2 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 15 \\ 0 & -2 & -4 & -3 & -6 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & -6 & -15 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 22 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 & -1 & -5/2 \\ 0 & -48 & -88 & -124 & -158 & -418 \end{pmatrix}$$

Puis

$$L_6 \leftarrow L_6 - 24L_2 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 15 \\ 0 & -2 & -4 & -3 & -6 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & -6 & -15 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 22 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 & -1 & -5/2 \\ 0 & 0 & 8 & -52 & -14 & -58 \end{pmatrix}$$

On échange :

$$L_3 \leftrightarrow L_4 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 15 \\ 0 & -2 & -4 & -3 & -6 & -15 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 22 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & -6 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 & -1 & -5/2 \\ 0 & 0 & 8 & -52 & -14 & -58 \end{pmatrix}$$

Maintenant :

$$L_6 \leftarrow L_6 - 4L_3 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 15 \\ 0 & -2 & -4 & -3 & -6 & -15 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 22 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & -6 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 & -1 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & -84 & -102 & -186 \end{pmatrix}$$

On continue :

$$L_5 \leftarrow L_5 - (1/6)L_4 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 15 \\ 0 & -2 & -4 & -3 & -6 & -15 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 22 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & -6 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -84 & -102 & -186 \end{pmatrix}$$

On a donc $\det(D) = 0$.

Exercice 6. On a les relations fondamentales :

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 + x_2 \\ y_2 = x_1 + 2x_2 \\ y_3 = 2x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

Ceci s'exprime matriciellement par:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

On a:

$$\begin{cases} p_1 = 16 \times 2 + 21 \times 1 + 45 \times 2 \\ p_2 = 16 \times 1 + 21 \times 2 + 45 \times 3 \end{cases}$$

Donc:

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 21 & 45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Le coût total est $p_1x_1 + p_2x_2$. Ceci peut s'écrire:

$$p_1x_1 + p_2x_2 = \begin{pmatrix} 16 & 21 & 45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 21 & 45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. Voyons système par système.

(S1) Ici on a:

1. Matrice du système :
$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -6 & 15 \end{pmatrix}$$
donc déterminant nul.

2. Donc pas de solution unique.

3. La question 3 n'a pas d'objet.

(S2) Cette fois on trouve :

1. la matrice :
$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. On trouve ensuite la série de transformations suivantes.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Nous avons réussi à inverser la matrice. En effet, la matrice inverse est:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Donc le système admet une solution qui est de plus unique.

3. La solution est donc :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 36 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(S3) Cette fois c'est 4×4.

1. La matrice est :

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 & 12 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 16 \\ 1 & 2 & 6 & 7 & 29 \\ 2 & 0 & 5 & 0 & 18 \end{array}\right)$$

Utilisons uniquement, cette fois, le pivot de Gauss et les échanges de lignes.

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \Longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 & 12 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 16 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 17 \\ 2 & 0 & 5 & 0 & 18 \end{array}\right)$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \Longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 & 12 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 16 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 17 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -6 \end{array}\right)$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \Longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 & 12 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -6 \end{array}\right)$$

$$L_3 \leftrightarrow L_4 \Longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 & 12 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 16 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

2. Nous avons fait un nombre impair d'échanges de lignes, donc le déterminant de cette matrice est l'opposé du déterminant de A. En effet, le déterminant change de signe autant de fois que nous faisons des interversions de lignes.
$$\det(A) = 2.$$
Le système admet donc une unique solution.

3. Cette solution satisfait :
$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 + 2x_4 = 12 \\ 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 16 \\ -x_3 - 4x_4 = -6 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$
En lisant ces équations à partir de la dernière, nous obtenons:
$$\begin{cases} x_4 = 1 & \Rightarrow \quad x_4 = 1 \\ -x_3 - 4 = -6 & \Rightarrow \quad x_3 = 2 \\ 2x_2 + 3 \times 2 + 4 = 16 & \Rightarrow \quad x_2 = 3 \\ x_1 + 3 \times 2 + 2 = 12 & \Rightarrow \quad x_1 = 4 \end{cases}$$
Finalement la solution est :
$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (4, 3, 2, 1).$$

Exercice 8. Notons y_i la quantité de produit Y_i, p_i la quantité de produit P_i et m_i la quantité de produit M_i. On a :
$$\begin{cases} p_1 = 8y_1 + 3y_2 + 6y_3 \\ p_2 = y_1 + 2y_2 + y_3 \end{cases}$$
et:
$$\begin{cases} m_1 = 7p_1 + 3p_2 \\ m_2 = p_1 + 4p_2 \\ m_3 = 5p_1 + p_2 \end{cases}$$
Ceci s'écrit:
$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$
et:
$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$
Donc:
$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$
Après le calcul on trouve:
$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 59 & 27 & 45 \\ 12 & 11 & 10 \\ 41 & 17 & 31 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Exercice 9. Notons p la quantité de plomb, z la quantité de zinc et e la quantité d'étain. On aura:
$$\begin{cases} p = 0,3 \times 350 = 105 \\ z = 0,3 \times 350 = 105 \\ e = 0,4 \times 350 = 140 \end{cases}$$
Après :
$$\begin{pmatrix} p \\ z \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,3 \\ 0,3 & 0,4 & 0,2 \\ 0,5 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

où a, b et c représentent les quantités des alliages A, B, C. On a la matrice qui exprime la système :

$$M = \begin{pmatrix} 1/5 & 3/10 & 3/10 \\ 3/10 & 2/5 & 1/5 \\ 1/2 & 3/10 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{pmatrix} p \\ z \\ e \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

ainsi, pourvu que $\det(M) \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} p \\ z \\ e \end{pmatrix}.$$

On calcule M^{-1} en utilisant la méthode de Gauss-Jordan. On écrit donc :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1/5 & 3/10 & 3/10 & 1 & 0 & 0 \\ 3/10 & 2/5 & 1/5 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 3/10 & 1/2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Puis $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{2} \times L_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1/5 & 3/10 & 3/10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/20 & -1/4 & -3/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 3/10 & 1/2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{5}{2} \times L_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1/5 & 3/10 & 3/10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/20 & -1/4 & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & -9/20 & -1/4 & -5/2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow L_3 - 9 \times L_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1/5 & 3/10 & 3/10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/20 & -1/4 & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 11 & -9 & 1 \end{array}\right)$$

A ce stade on peut calculer:

$$\det(M) = \frac{1}{5} \times \frac{-1}{20} \times 2 = -\frac{1}{50}.$$

On continue ensuite la méthode de Gauss-Jordan. On fait $L_3 \leftarrow \frac{1}{2} \times L_3$ donc :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1/5 & 3/10 & 3/10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/20 & -1/4 & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 11/2 & -9/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{4} \times L_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1/5 & 3/10 & 3/10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/20 & 0 & -1/8 & -1/8 & 1/8 \\ 0 & 0 & 1 & 11/2 & -9/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow 20 \times L_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1/5 & 3/10 & 3/10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5/2 & 5/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 11/2 & -9/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow L_1 - \frac{3}{10} \times L_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1/5 & 3/10 & 0 & -13/20 & 27/20 & -3/20 \\ 0 & 1 & 0 & 5/2 & 5/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 11/2 & -9/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow L_1 - \frac{3}{10} \times L_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1/5 & 0 & 0 & -7/5 & 3/5 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 & 5/2 & 5/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 11/2 & -9/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow 5 \times L_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5/2 & 5/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 11/2 & -9/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

Ce qui donne :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 3 \\ 5/2 & 5/2 & -5/2 \\ 11/2 & -9/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Finalement :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} 105 \\ 105 \\ 140 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 175 \\ 175 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10. Chaque coque $C1$ nécessite de $50kg$ de R_1 donc fournit une contribution de $50Kg = 0,05$ tonnes pour y_1. Si on a x_1 conques $C1$, on doit engager $50x_1$ kilos de R_1, et ainsi de suite. De cette façon, en exprimant tout en tonnes:

$$\begin{cases} y_1 = 0,05x_1 + 0,06x_2 + 0,040_3 \\ y_2 = 0,02x_1 + 0.03x_2 + 0.05x_3 \\ y_2 = x_3 + x_2 + 0,5x_3 \end{cases}$$

1) On en obtient la matrice (où tout est écrit en tonnes):

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,05 & 0,06 & 0,04 \\ 0,02 & 0,03 & 0,05 \\ 1 & 1 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = AX.$$

2) On écrit A en fractions :

$$A = \begin{pmatrix} 1/20 & 3/50 & 1/25 \\ 1/50 & 3/100 & 1/20 \\ 1 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

On juxtapose la matrice identité afin de calculer l'inverse :

$$(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1/20 & 3/50 & 1/25 & 1 & 0 & 0 \\ 1/50 & 3/100 & 1/20 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ensuite, on trouve les transformations suivantes :

$$L_1 \leftarrow 20L_1 \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6/5 & 4/5 & 20 & 0 & 0 \\ 1/50 & 3/100 & 1/20 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ensuite :

$$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{2}{100}L_1 \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6/5 & 4/5 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 3/500 & 17/500 & -2/5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Puis :

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6/5 & 4/5 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 3/500 & 17/500 & -2/5 & 1 & 0 \\ 0 & -1/5 & -3/10 & -20 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Après :

$$L_2 \leftarrow \frac{500}{3} L_2 \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6/5 & 4/5 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 17/3 & -200/3 & 500/3 & 0 \\ 0 & -1/5 & -3/10 & -20 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ensuite :

$$L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{5} L_2 \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6/5 & 4/5 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 17/3 & -200/3 & 500/3 & 0 \\ 0 & 0 & 5/6 & -100/3 & 100/3 & 1 \end{array}\right)$$

Puis

$$L_3 \leftarrow \frac{6}{5} L_3 \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6/5 & 4/5 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 17/3 & -200/3 & 500/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -40 & 40 & 6/5 \end{array}\right)$$

On remonte :

$$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{17}{3} L_3 \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6/5 & 4/5 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 160 & -60 & -34/5 \\ 0 & 0 & 1 & -40 & 40 & 6/5 \end{array}\right)$$

Puis :

$$L_1 \leftarrow L_1 - \frac{4}{5} L_3 \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6/5 & 0 & 52 & -32 & -24/25 \\ 0 & 1 & 0 & 160 & -60 & -34/5 \\ 0 & 0 & 1 & -40 & 40 & 6/5 \end{array}\right)$$

Enfin :

$$L_1 \leftarrow L_1 - \frac{6}{5} L_2 \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -140 & 40 & 36/5 \\ 0 & 1 & 0 & 160 & -60 & -34/5 \\ 0 & 0 & 1 & -40 & 40 & 6/5 \end{array}\right)$$

Le résultat est :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -140 & 40 & 36/5 \\ 160 & -60 & -34/5 \\ -40 & 40 & 6/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -140 & 40 & 7,2 \\ 160 & -60 & -6,8 \\ -40 & 40 & 1,2 \end{pmatrix}$$

3) On écrit:

$$X = A^{-1} Y = \begin{pmatrix} -140 & 40 & 7,2 \\ 160 & -60 & -6,8 \\ -40 & 40 & 1,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2,1 \\ 1,3 \\ 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

4) On aurait:

$$X' = A^{-1} Y' = \begin{pmatrix} -140 & 40 & 7,2 \\ 160 & -60 & -6,8 \\ -40 & 40 & 1,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2,1 \\ 2 \\ 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 \\ -22 \\ 38 \end{pmatrix}.$$

Ceci est impossible puisque la valeur $x_2 = -22$ étant négative, on devrait produite un nombre négatif x_2 de coques $C2$, ce qui est manifestement impossible.

Exercice 11. Écrivons les matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 3 \\ 1 & 3/2 & 1 \\ 3 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On trouve:

$$M = A + 3/2I - 2J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. On trouve :

$$J^2 = I.$$

2. On calcule :
$$AJ = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1/2 \\ 1 & 3/2 & 1 \\ -1/2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = JA.$$

3. On trouve :
$$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3M.$$

4. Comme I commute à toute matrice et que A commute à J, on trouve, en utilisant $J^2 = I$:
$$M^2 = A^2 + 9/4I + 4I + 3A - 4AJ - 6J,$$
et comme nous avons ceci est égal à $3M$, donc :
$$M^2 = A^2 + 9/4I + 4I + 3A - 4AJ - 6J - 3A - 9/2I + 6J = 0.$$
On en déduit :
$$A^2 - 4AJ + 7/4I = 0.$$

5. On en déduit :
$$A(A - 4J) = -7/4I,$$
donc :
$$A^{-1} = \frac{4}{7}(4J - A).$$

6. On trouve :
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/7 & -4/7 & 4/7 \\ -4/7 & 10/7 & -4/7 \\ 4/7 & -4/7 & 2/7 \end{pmatrix}.$$
Ceci se fait par les transformations suivantes :
$$(A|I_3) = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3/2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1/2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
On normalise :
$$L_1 \leftarrow -2L_1 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 3/2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1/2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
On applique le pivot :
$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 7/2 & 7 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1/2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Puis :
$$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 7/2 & 7 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 35/2 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
On normalise :
$$L_2 \leftarrow \frac{2}{7}L_2 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4/7 & 2/7 & 0 \\ 0 & 7 & 35/2 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Puis par pivot :

$$L_3 \leftarrow L_3 - 7L_2 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4/7 & 2/7 & 0 \\ 0 & 0 & 7/2 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Dernière normalisation :

$$L_3 \leftarrow \frac{2}{7}L_3 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4/7 & 2/7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4/7 & -4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$$

Désormais on remonte :

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4/7 & 10/7 & -4/7 \\ 0 & 0 & 1 & 4/7 & -4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$$

puis

$$L_1 \leftarrow L_1 + 6L_3 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 10/7 & -24/7 & 12/7 \\ 0 & 1 & 0 & -4/7 & 10/7 & -4/7 \\ 0 & 0 & 1 & 4/7 & -4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$$

et enfin :

$$L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2/7 & -4/7 & 4/7 \\ 0 & 1 & 0 & -4/7 & 10/7 & -4/7 \\ 0 & 0 & 1 & 4/7 & -4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$$