# Calcul matriciel et systèmes linéaires

*16 décembre 2016*

**Exercice 1.** Nous écrivons tous les produits possibles. Les produits que nous n'écrivons pas sont impossibles. Les possibilités sont listées en fonction de quelle matrice on met en premier dans le produit.

A) Nous avons les produits :

$$AC = \begin{pmatrix} 40 & 34 \\ 110 & 94 \end{pmatrix}, \qquad AX = \begin{pmatrix} 11 \\ 31 \end{pmatrix}.$$

B) Nous avons :

$$BA = \begin{pmatrix} -4 & -7 & -5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

C) Pour $C$ nous avons aussi deux produits :

$$CA = \begin{pmatrix} 50 & 65 & 67 \\ 38 & 49 & 51 \\ 26 & 33 & 35 \end{pmatrix}, \qquad CB = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

X) Pour $X$ il y a un seul produit possible.

$$XY = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 & -6 \\ 2 & 0 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Y) Pour $Y$ il n'y a aucun produit possible.

**Exercice 2.** On a:

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}, \qquad A - B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$2A + 3B = \begin{pmatrix} 8 & 11 & -5 \\ 7 & 6 & 10 \\ 3 & 9 & 20 \end{pmatrix}, \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 2 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 22 \end{pmatrix},$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 6 & 11 & 0 \\ 6 & 9 & 11 \\ 7 & 9 & 17 \end{pmatrix}, \qquad AB = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 6 & 8 & 6 \\ 7 & 10 & 22 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 0 \\ 5 & 7 & 11 \\ 3 & 13 & 17 \end{pmatrix}.$$

$$(2A + 3B)^2 = \begin{pmatrix} 126 & 109 & -30 \\ 128 & 203 & 225 \\ 147 & 267 & 475 \end{pmatrix}, \qquad (A - B)(A + B) = \begin{pmatrix} -9 & -8 & -6 \\ -3 & 0 & -10 \\ 3 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Les deux façons d'écrire $(2A + 3B)^2$ sont:

$$(2A + 3B) = \begin{pmatrix} 8 & 11 & -5 \\ 7 & 6 & 10 \\ 3 & 9 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 11 & -5 \\ 7 & 6 & 10 \\ 3 & 9 & 20 \end{pmatrix},$$

et :

$$(2A+3B)^2 = 4A^2+6AB+6BA+9B^2 =$$

$$= 4\begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 2 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 22 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 6 & 8 & 6 \\ 7 & 10 & 22 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 8 & -1 & 0 \\ 5 & 7 & 11 \\ 3 & 13 & 17 \end{pmatrix} + 9\begin{pmatrix} 6 & 11 & 0 \\ 6 & 9 & 11 \\ 7 & 9 & 17 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 3.** Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

On calcule alors:

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 31 & 13 \\ 13 & 12 \end{pmatrix}$$

$$A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 10 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 10 & 3 & 2 & 34 \end{pmatrix}$$

**Exercice 4.** On multiplie la deuxième équation par 5 et on ajoute à la première, en obtenant, à gauche:

$$3A - 5B + 5 \times (2A + B) = 3A - 5B + 10A + 5B = 13A,$$

et à droite:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + 5 \times \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 7 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$$

On en obtient:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{14}{13} & \frac{7}{13} \\ \frac{4}{13} & -\frac{8}{13} \end{pmatrix}$$

Donc:

$$B = -2A + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{13} & -\frac{1}{13} \\ -\frac{8}{13} & -\frac{10}{13} \end{pmatrix}$$

**Exercice 5.** On a les relations fondamentales :

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 + x_2 \\ y_2 = x_1 + 2x_2 \\ y_3 = 2x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

Ceci s'exprime matriciellement par:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

On a:

$$\begin{cases} p_1 = 16 \times 2 + 21 \times 1 + 45 \times 2 \\ p_2 = 16 \times 1 + 21 \times 2 + 45 \times 3 \end{cases}$$

Donc:

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 21 & 45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Le coût total est $p_1x_1 + p_2x_2$. Ceci peut s'écrire:

$$p_1x_1 + p_2x_2 = \begin{pmatrix} 16 & 21 & 45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 21 & 45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 6.** Notons $y_i$ la quantité de produit $Y_i$, $p_i$ la quantité de produit $P_i$ et $m_i$ la quantité de produit $M_i$. On a :

$$\begin{cases} p_1 = 8y_1 + 3y_2 + 6y_3 \\ p_2 = y_1 + 2y_2 + y_3 \end{cases}$$

et:

$$\begin{cases} m_1 = 7p_1 + 3p_2 \\ m_2 = p_1 + 4p_2 \\ m_3 = 5p_1 + p_2 \end{cases}$$

Ceci s'écrit:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

et:

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

Donc:

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Après le calcul on trouve:

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 59 & 27 & 45 \\ 12 & 11 & 10 \\ 41 & 17 & 31 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

**Exercice 8.** Voyons système par système.

(S1) Ici on a:

1. Matrice du système :

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -6 & 15 \end{pmatrix}$$

   donc déterminant nul.

2. Donc pas de solution unique.
3. La question 3 n'a pas d'objet.

(S2) Cette fois on trouve :

1. la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. On trouve ensuite la série de transformations suivantes. *Attention, ce sont les transformations faites en classe, sauf que ici j'ai écrit la méthode pour obtenir la matrice inverse, dans le but de fournir un exemple de la méthode d'inversion aussi.*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Nous avons réussi à inverser la matrice. En effet, la matrice inverse est:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Donc le système admet une solution qui est de plus unique.

3. La solution est donc :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 36 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(S3) Cette fois c'est $4 \times 4$.

1. La matrice est :

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 & 12 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 16 \\ 1 & 2 & 6 & 7 & 29 \\ 2 & 0 & 5 & 0 & 18 \end{array}\right)$$

Utilisons uniquement, cette fois, le pivot de Gauss et les échanges de lignes.

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \Longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 & 12 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 16 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 17 \\ 2 & 0 & 5 & 0 & 18 \end{array}\right)$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \Longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 & 12 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 16 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 17 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -6 \end{array}\right)$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \Longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 & 12 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -6 \end{array}\right)$$

$$L_3 \leftrightarrow L_4 \Longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 & 12 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 16 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

2. Nous avons fait un nombre impair d'échanges de lignes, donc le déterminant de cette matrice est l'opposé du déterminant de $A$. En effet, le déterminant change de signe autant de fois que nous faisons des interversions de lignes.
$$\det(A) = 2.$$
Le système admet donc une unique solution.

3. Cette solution satisfait :
$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 + 2x_4 = 12 \\ 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 16 \\ -x_3 - 4x_4 = -6 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$
En lisant ces équations à partir de la dernière, nous obtenons:
$$\begin{cases} x_4 = 1 & \Rightarrow \quad x_4 = 1 \\ -x_3 - 4 = -6 & \Rightarrow \quad x_3 = 2 \\ 2x_2 + 3 \times 2 + 4 = 16 & \Rightarrow \quad x_2 = 3 \\ x_1 + 3 \times 2 + 2 = 12 & \Rightarrow \quad x_1 = 4 \end{cases}$$
Finalement la solution est :
$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (4, 3, 2, 1).$$

**Exercice 9.** Notons $p$ la quantité de plomb, $z$ la quantité de zinc et $e$ la quantité d'étain. On aura:
$$\begin{cases} p = 0,3 \times 350 = 105 \\ z = 0,3 \times 350 = 105 \\ e = 0,4 \times 350 = 140 \end{cases}$$
Après :
$$\begin{pmatrix} p \\ z \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,3 \\ 0,3 & 0,4 & 0,2 \\ 0,5 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$
où $a$, $b$ et $c$ représentent les quantités des alliages $A$, $B$, $C$. On a la matrice qui exprime la système :
$$M = \begin{pmatrix} 1/5 & 3/10 & 3/10 \\ 3/10 & 2/5 & 1/5 \\ 1/2 & 3/10 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Donc
$$\begin{pmatrix} p \\ z \\ e \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$
ainsi, pourvu que $\det(M) \neq 0$:
$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} p \\ z \\ e \end{pmatrix}.$$
On calcule $M^{-1}$ en utilisant la méthode de Gauss-Jordan. On écrit donc :
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1/5 & 3/10 & 3/10 & 1 & 0 & 0 \\ 3/10 & 2/5 & 1/5 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 3/10 & 1/2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
Puis $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{2} \times L_1$:
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1/5 & 3/10 & 3/10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/20 & -1/4 & -3/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 3/10 & 1/2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{5}{2} \times L_1$ :
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1/5 & 3/10 & 3/10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/20 & -1/4 & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & -9/20 & -1/4 & -5/2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$L_3 \leftarrow L_3 - 9 \times L_2$ :
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1/5 & 3/10 & 3/10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/20 & -1/4 & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 11 & -9 & 1 \end{array}\right)$$
A ce stade on peut calculer:
$$\det(M) = \frac{1}{5} \times \frac{-1}{20} \times 2 = -\frac{1}{50}.$$
On continue ensuite la méthode de Gauss-Jordan. On fait $L_3 \leftarrow \frac{1}{2} \times L_3$ donc :
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1/5 & 3/10 & 3/10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/20 & -1/4 & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 11/2 & -9/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{4} \times L_3$ :
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1/5 & 3/10 & 3/10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/20 & 0 & -1/8 & -1/8 & 1/8 \\ 0 & 0 & 1 & 11/2 & -9/2 & 1/2 \end{array}\right)$$
$L_2 \leftarrow 20 \times L_2$ :
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1/5 & 3/10 & 3/10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5/2 & 5/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 11/2 & -9/2 & 1/2 \end{array}\right)$$
$L_1 \leftarrow L_1 - \frac{3}{10} \times L_3$ :
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1/5 & 3/10 & 0 & -13/20 & 27/20 & -3/20 \\ 0 & 1 & 0 & 5/2 & 5/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 11/2 & -9/2 & 1/2 \end{array}\right)$$
$L_1 \leftarrow L_1 - \frac{3}{10} \times L_2$ :
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1/5 & 0 & 0 & -7/5 & 3/5 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 & 5/2 & 5/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 11/2 & -9/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow 5 \times L_1$ :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5/2 & 5/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 11/2 & -9/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

Ce qui donne :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 3 \\ 5/2 & 5/2 & -5/2 \\ 11/2 & -9/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Finalement :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} 105 \\ 105 \\ 140 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 175 \\ 175 \end{pmatrix}.$$