Analyse d'une variable réelle

Exercice 1. Utilisons les règles du logarithme et de l'exponentielle.

1. Pour le logarithme, on doit résoudre:

$$\boxed{2\ln(3x-4)+\ln(10x-4)=2\ln(5x-2)}$$

On écrit:

$$\begin{aligned}
2\ln(3x-4)+\ln(10x-4)=2\ln(5x-2) &\Leftrightarrow \ln((3x-4)^2(10x-4))-2\ln(5x-2)=0\\
&\Leftrightarrow \ln((3x-4)^2(10x-4))=\ln((5x-2)^2)\\
&\Leftrightarrow (3x-4)^2(10x-4)=(5x-2)^2\\
&\Leftrightarrow 2(3x-4)^2(5x-2)=(5x-2)^2\\
&\Leftrightarrow (5x-2)(2(3x-4)^2-(5x-2))=0\\
&\Leftrightarrow (5x-2)(18x^2-53x+34)=0\\
&\Leftrightarrow (5x-2)(x-2)(18x-17)=0\\
&\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{2}{5},2,\frac{17}{18}\right\}.
\end{aligned}$$

Seul la valeur 2 est dans le domaine de définition.

2. Pour l'exponentielle on doit résoudre:

$$\boxed{\exp(2x)-3\exp(x)+2=0.}$$

On écrit :

$$\begin{aligned}
\exp(2x)-3\exp(x)+2=0 &\Leftrightarrow (\exp(x))^2-3\exp(x)+2=0\\
&\Leftrightarrow (\exp(x)-2)(\exp(x)-1)=0\\
&\Leftrightarrow \exp(x)\in\{1,2\}\\
&\Leftrightarrow x\in\{\ln 1,\ln 2\}\\
&\Leftrightarrow x\in\{0,\ln 2\}.
\end{aligned}$$

Exercice 2. Le système S1. La première équation donne:

$$\exp(x-1)\exp(y-3)=1\Leftrightarrow \exp(x-1+y-3)=1\Leftrightarrow x-1+y-3=0.$$

La deuxième équation donne:

$$\ln(x/2)+\ln(8y)=\ln(12)\Leftrightarrow \ln(4xy)=\ln(12)\Leftrightarrow xy=3.$$

On remplace $x=4-y$ dans $xy=3$ pour obtenir:

$$(4-y)y=3\Leftrightarrow y^2-4y+3=0\Leftrightarrow y\in\{1,3\}.$$

Les solutions sont donc les paires:

$$(x,y)=(3,1),\qquad (x,y)=(1,3).$$

Le système S2. $\ln(xy)=7$ veut dire $xy=\exp(7)$. Par contre $\ln(x/y)=1$ est équivalent à $x=ey$. Donc:

$$\begin{cases} xy=\exp(7)=e^7,\\ x=ey.\end{cases}$$

Clairement $y \neq 0$ sinon $xy = 0 \neq e^7$. On remplace x par e^7/y et on obtient:

$$\begin{cases} xy = e^7, \\ e^7/y = e^7. \end{cases}$$

On en obtient:

$$\begin{cases} xy = e^7, \\ e^6 = y^2. \end{cases}$$

Ainsi $y = e^3$ et $x = e^4$.

Pour S3. En prenant le logarithme en base 2, l'équation $2^x - 3^y = 0$ est équivalente à:

$$x = \log_2(3^y) = y \log_2 3.$$

On a alors le système:

$$\begin{cases} x + 2y = 1, \\ x = (\log_2 3)y. \end{cases}$$

On remplace $x = (\log_2 3)y$ pour obtenir:

$$(\log_2 3)y + 2y = 1,$$

ce qui veut dire:

$$y = \frac{1}{2 + \log_2 3}.$$

Ainsi:

$$x = \frac{\log_2 3}{2 + \log_2 3}.$$

Exercice 3. On met en évidence $x + 1$, donc l'expression devient:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x+1}} \left((x+1) + \frac{3x-4}{4} \right) = \frac{7x}{4\sqrt[4]{x+1}}.$$

Exercice 4. On sait $\log(2) = 0.30103$ (logarithme en base 10). On calcule:

$$\log(5) = \log(10 \cdot 2^{-1}) = \log(10) - \log(2) = 1 - \log(2) = 0.69897.$$

Ensuite:

$$\begin{aligned} &\log(25) = \log(5^2) = 2\log(5) = 1.39794, \\ &\log(0.2) = \log\left(\frac{1}{5}\right) = -0.69897 \log(5^{-1}) = -\log(5), \\ &\log(6.25) = \log(5^4 \cdot 10^{-2}) = \log(5^2 \cdot 2^{-2}) = 2\log(5) - 2\log(2) = 0.79588. \end{aligned}$$

Exercice 5. On a:

$$\ln\sqrt{x-1} - \ln\sqrt{x+1} = \ln\left(\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}\right),$$

donc cet expression vaut 1 précisément lorsque:

$$\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} = e,$$

i.e. lorsque:

$$\frac{x-1}{x+1} = e^2,$$

Donc on trouve:

$$x(1 - e^2) = 1 + e^2,$$

ainsi:

$$x = \frac{1+e^2}{1-e^2}.$$

Exercice 6. Soit f la fonction en question, et soit $D = D_f$ le domaine de définition de f.

1. $D = \mathbb{R}$.
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad\qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

2. $D = \mathbb{R}$.
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.$$

3. Pour D, on regarde d'abord le dénominateur. Bien sûr on doit avoir $x \geq 0$, sans quoi $\sqrt{x}$ n'est pas défini. Puis on résout $x + 1 = \sqrt{x}$. On a $x^2 + 2x + 1 = x$, autrement dit $x^2 + x + 1 = 0$. Ce trinome a discriminant négatif donc cette équation n'a pas de solution. Ainsi le domaine de définition du dénominateur est $[0, +\infty[$. Pour le numérateur, on doit avoir $x^2 - 5 \geq 0$, donc $x \leq -5$ ou $x \geq 5$. Finalement on trouve $D = [5, +\infty[$.
$$\lim_{x\to 5} f(x) = \frac{5}{\sqrt{5}-6}, \qquad\qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

4. D'abord $\ln(x)$ n'est défini que si $x > 0$. Donc $D =]0, +\infty[$. Ensuite, on rappelle que, quelque soient $0 < a, b \in \mathbb{R}$, on a:
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{(\ln(x))^b} = +\infty.$$
En effet, en partant du cas de base:
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{(\ln(x))} = +\infty,$$
on prend le logarithme de l'expression avec a et b, donc:
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a\ln x}{b\ln(\ln(x))} = +\infty,$$
ainsi en remplaçant $y = \ln(x)$:
$$\lim_{y\to+\infty} \frac{ay}{b\ln(y)} = +\infty,$$
On en obtient:
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty, \qquad\qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (\ln(x))^2 \left(\frac{x}{(\ln(x))^2} - 1\right) = +\infty.$$

5. D'abord on rappelle que, pour tout $0 < a, b \in \mathbb{R}$, on a:
$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\exp(x))^a}{x^b} = +\infty.$$
Ceci est clair en remplaçant $x = \ln(y)$ et en utilisant la formule déjà donnée pour le logarithme. Autrement, on peut procéder directement:
$$\frac{(\exp(x))^a}{x^b} = \frac{\exp(ax)}{x^b},$$
puis prenant le logarithme:
$$\frac{\ln(\exp(ax))}{\ln(x^b)} = \frac{ax}{b\ln(x)}.$$
Ceci tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Donc on a:
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$

Exercice 7. On pose $D = D_f$.

1. Ici $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$. On calcule:
$$f'(x) = \frac{a(cx+d) - c(ax+b)}{(cx+d)^2} = \frac{ad - bd}{(cx+d)^2}.$$

2. On a $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. On calcule:
$$f'(x) = \frac{2x(x^3-1) - 3x^2(x^2+1)}{(x^3-1)^2} = -x\frac{x^3+3x+2}{(x^3-1)^2}.$$

3. $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
$$f'(x) = \frac{(x+1)^2(x+7)}{(x-1)^5}.$$

4. $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
$$f'(x) = \frac{nx^{n-1}}{(x+1)^{n+1}}.$$

5. $D =]-\infty, \frac{1}{2}[\cup]1, +\infty[$.
$$f'(x) = \frac{4\,x-3}{2\,\sqrt{2\,x^2-3\,x+1}}.$$

6. $D =]-a, a[$.
$$f'(x) = \frac{a^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

7. $D = \mathbb{R}$.
$$f'(x) = xe^x.$$

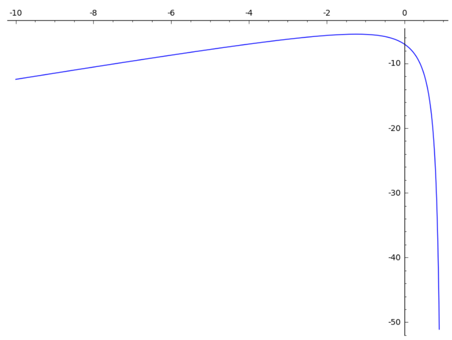
8. $D = \mathbb{R}$.
$$f'(x) = x^3e^x.$$

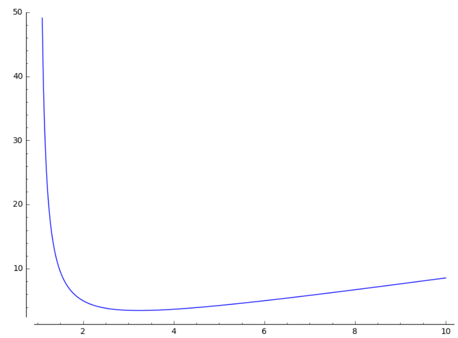
9. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
$$f'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2}.$$

10. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
$$f'(x) = \frac{\left(x^3-6\right)e^x}{2\,x^4}.$$

Exercice 8. On a :
$$f(x) = \frac{x^2-3x+7}{x-1}.$$
Le domaine de définition de f est $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. La dérivée de f vaut :
$$f'(x) = \frac{x^2-2x-4}{(x-1)^2}.$$
Donc $f'(x)$ s'annule en :
$$x_1 = 1 - \sqrt{5} \qquad x_2 = 1 + \sqrt{5}.$$
On voit alors facilement que $f'(x) > 0$ si $x < 1 - \sqrt{5}$ ou $x > 1 + \sqrt{5}$, alors que $f'(x) = 0$ ssi $x = 1 \pm \sqrt{5}$ et $f'(x) < 0$ ssi $x \in]1-\sqrt{5}, 1+\sqrt{5}[\setminus\{1\}$. De ceci on déduit que f possède un maximum local en $1 - \sqrt{5}$, égal à $f(1-\sqrt{5}) = -2\sqrt{5} - 1$, et un minimum local en $1 + \sqrt{5}$, égal à $f(1+\sqrt{5}) = 2\sqrt{5} - 1$.

Voici l'allure des branches la courbe :





Exercice 9. La fonction qui apparaît dans cet exercice est une gaussienne:

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Calculons :

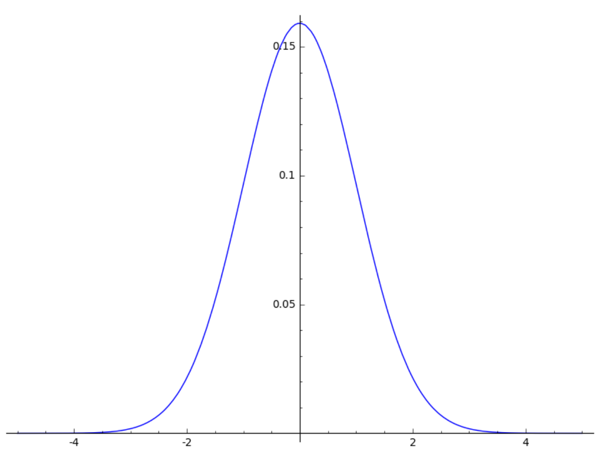
$$f'(x) = -\frac{xe^{\left(-\frac{1}{2}x^2\right)}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Comme e^y est positive quelque soit y, on a $f'(x) > 0$ si $x > 0$, $f'(x) < 0$ si $x < 0$ et $f'(x) = 0$ si $x = 0$. La fonction dérivée est donc nulle uniquement en 0 et change de signe en 0 ainsi 0 est maximum global de f.

Aux extrêmes du domaine, c'est-à-dire en $+\infty$ et $-\infty$, on a :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

Voici l'allure de la courbe :



Exercice 10. Soit q la quantité produite. Cette quantité est égale à la demande (on épuise le stock). On a donc :

$$q(x) = 6 \times 10^5 - 300x.$$

Ainsi le bénéfice en euros est :

$$b(x) = -300\,x^2 + 623400\,x - 46850000.$$

Pour maximiser $b(x)$ on calcule :

$$b'(x) = -600\,x + 623400.$$

Cette fonction s'annule en :

$$x_0 = \frac{623400}{600} = 1039$$

On voit que $b'(x)$ change de signe en x_0 en passant de négative à positive, donc x_0 est un maximum local (au fait, global) pour $b(x)$. Le bénéfice maximum (en euros) est :

$$b(x_0) = 277006300.$$

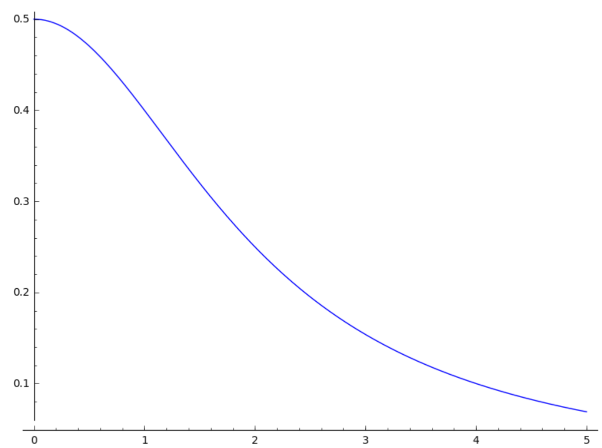
Exercice 11. On sait que l'élasticité instantanée $\mathcal{E}_f(x)$ est définie par:

$$\mathcal{E}_f(x) = \frac{f'(x)x}{f(x)}.$$

1. On trouve:

$$f'(x) = -\frac{4\,x}{\left(x^2+4\right)^2}.$$

   Donc $f'(x)$ change de signe en 0 en passant de positive à négative. On a donc f strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$. La fonction f admet donc un maximum global en $x = 0$ et ce maximum vaut $1/2$. Voici l'allure de la fonction f sur $\mathbb{R}_+$.



2. L'élasticité est :

$$\mathcal{E}_f(x) = \frac{f'(x)x}{f(x)} = -\frac{2\,x^2}{x^2+4}.$$

3. On calcule la dérivée de $\mathcal{E}_f$:

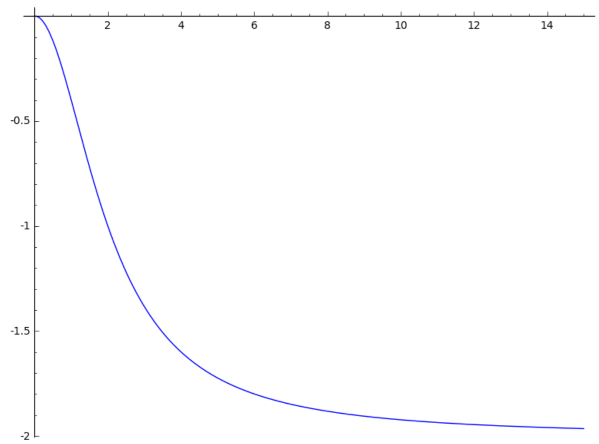
$$\mathcal{E}_f'(x) = \frac{4\,x^3}{\left(x^2+4\right)^2} - \frac{4\,x}{x^2+4} = -\frac{16x}{\left(x^2+4\right)^2}.$$

   Ainsi, $\mathcal{E}_f(x)$ est strictement décroissante.

4. On a :

$$\lim_{x\to+\infty} \mathcal{E}_f(x) = -2.$$

   Ceci veut dire que, l'élasticité passe d'une valeur $-0,5$ (donc un produit plutôt inélastique) lorsque le prix est bas à une valeur -2 (plutôt élastique) lorsque le prix augmente beaucoup. Si le prix est bas ce produit devient basique donc peu élastique, si le prix est haut le produit deviendra moins incontournable et sa demande va être assujettie aux variations de prix. L'allure de $\mathcal{E}_f$:



RAPPEL. Règles exponentielle et logarithme.

$$e^x e^y = e^{x+y}, \qquad \ln e^x = x, \qquad \ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

$$\ln(x^a) = a \ln x, \qquad \exp(ax) = (\exp(x))^a.$$

$$\log_\alpha x = \frac{\log_\beta x}{\log_\beta \alpha}.$$

Très important aussi:

$$u^v = e^{v \ln u}.$$