Exercice 1. Dans l'espace affine $\mathbb{Q}^4$ de coordonnées (x_1, x_2, x_3, x_4), pour $\lambda \in \mathbb{Q}$, considérons :

$$D : \begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 + 1 = 0, \\ x_2 + x_4 - 1 = 0. \end{cases} \qquad D_\lambda : \begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2, \\ x_1 - x_2 - x_3 + \lambda x_4 = \lambda. \end{cases}$$

Montrer que D et D_λ sont deux plan affines, dont on donnera les directions. Montrer que $D \cap D_\lambda$ est réduit à un seul point. Que vaut $\mathrm{aff}(D \cup D_\lambda)$?

Exercice 2. Soit $(O, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ repère d'un espace affine $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{K}$ et $\mathcal{R} = (P_0, \dots, P_n) \in \mathcal{E}^{n+1}$ points de $\mathcal{E}$ de coordonnées cartésiennes $(X_0, \dots, X_n)$ avec $X_i = {}^t(1, x_{1,i}, \dots, x_{n,i}) \in \mathbb{K}^{n+1}$.

1. Exprimer le fait que $\mathcal{R}$ est un repère affine en fonction des $(x_{i,j})$.
2. Dans ce cas, donner les coordonnées en $\mathcal{R}$ des $(n+1)$ points $(O, O + \vec{u}_1, \dots, O + \vec{u}_n)$.

Exercice 3. Soit $\mathcal{R} = (P_0, P_1, P_2)$ repère affine d'un plan affine $\mathcal{E}$ et $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ coordonnées barycentriques de $P \in \mathcal{E}$. Notons L_i la droite joignant les points de $\{P_j \mid j \in [\![0, 2]\!] \setminus \{i\}\}$.

1. Exprimer en les λ_i le fait que P n'appartient pas à $L_0 \cup L_1 \cup L_2$.
2. Exprimer en les λ_i le fait que (PP_i) n'est pas parallèle à L_i.
3. Soit (PP_i) non parallèle à L_i pour $i = 0, 1, 2$ et notons $Q_i = (PP_i) \cap L_i$. Calculer les coordonnées barycentriques de (Q_0, Q_1, Q_2) en $\mathcal{R}$ puis celles de P en les repères (P_i, Q_i).

Exercice 4 (Théorème de Gergonne)**.** Soit A, B, C, A', B', C' comme dans le théorème de Ménélaüs, avec (AA'), (BB'), (CC') concourantes en M. Montrer :

$$\frac{A'M}{A'A} + \frac{B'M}{B'B} + \frac{C'M}{C'C} = 1.$$

Exercice 5. Considérons $\mathbb{R}^n$ muni de la topologie usuelle.

1. Soit A l'intérieur de $C \subset \mathbb{R}^n$ convexe. Supposons $A \neq \emptyset$. Montrer que A est dense dans C.
2. Montrer que l'enveloppe convexe d'une partie finie de $\mathbb{R}^n$ est compacte.

Exercice 6. Soit $(A_0, \dots, A_n)$ un repère affine de $\mathcal{E}$ espace affine sur $\mathbb{C}$ et soit $B_i = A_{i+1}$ pour $i = 0, \dots, n-1$, $B_n = A_0$. Justifier qu'il existe unique $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ affine avec $\varphi(A_i) = B_i$, $\forall i = 0, \dots, n$, puis :

1. donner la matrice de φ en $\mathcal{R} = (A_0, \dots, A_n)$ puis en $\mathcal{S} = (A_0, \vec{e}_0, \dots, \vec{e}_n)$ où $\vec{e}_i = \overrightarrow{A_0 A_i}$;
2. montrer que φ est d'ordre $n+1$ et possède un unique point fixe O, que l'on trouvera ;
3. trouver n droites $O + \mathrm{vect}(u_k)$ où φ se restreint à $\varphi(O + \lambda u_k) = O + \lambda \zeta^k u_k$ où $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{n+1}}$.

Exercice 7. Trouver, selon $\lambda \in \mathbb{R}$, tous les points fixes de $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \big(-x_1 - 2, \quad x_1 - x_2 - 2x_3, \quad -x_1 + x_3 - \lambda\big). \tag{1}$$

Exercice 8. Soit $O \neq Q$ points d'un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension $n < \infty$. Soit $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subset \mathcal{E}$ sous espaces affines avec $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{G}} \oplus \vec{\mathcal{F}}$. Soit φ (resp. ψ) la symétrie d'axe $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{G}$) parallèle à $\vec{\mathcal{G}}$ (resp. à $\mathcal{F}$). On note aussi σ_O (resp. σ_Q) la symétrie centrale par rapport à O (resp. Q).

1. Décrire le sous groupe $\langle \varphi, \psi \rangle \subset \mathrm{GA}(\mathcal{E})$.
2. Soit G le sous groupe $\langle \sigma_O, \sigma_Q \rangle \subset \mathrm{GA}(\mathcal{E})$. Montrer que $G \simeq \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
3. Dire si $\varphi \circ \sigma_O$ possède des points fixes puis en donner la décomposition canonique.
4. Décrire le sous groupe $\langle \sigma_O, \varphi \rangle \subset \mathrm{GA}(\mathcal{E})$.

Exercice 9. Soit $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ affine avec $\mathrm{Fix}(\varphi) = \{O\}$. Quelles translations commutent avec φ ?

Exercice 10. Une symétrie-translation est la composition d'une symétrie et d'une translation.

1. Montrer que φ affine est une symétrie-translation ssi φ^2 est une translation.
2. Que peut-on dire de la décomposition canonique d'une symétrie-translation ?
3. Soit φ définie par (1). Montrer que φ est une symétrie-translation puis trouver la décomposition canonique de φ.