Géométrie – Master 1 PMG

Temps disponible : 2 heures

Toutes les réponses doivent être justifiées. Il est possible d'admettre la réponse à une question afin de répondre aux questions suivantes.

Exercice 1. Soit $n \geq 3$ un entier et E un espace vectoriel euclidien de dimension n.

a) Justifier que $\mathrm{SO}(E)$ est connexe par arcs.

b) Montrer que $\mathrm{O}(E)$ possède deux composantes connexes.

c) Pour $n = 4$, trouver deux éléments explicites de $\mathrm{O}(E)$ dans deux composantes connexes distinctes, puis un chemin explicite dans $\mathrm{SO}(E)$ qui relie id_E et $-\mathrm{id}_E$.

Soit $N \triangleleft \mathrm{SO}(E)$ un sous groupe normal de E.

d) Justifier que, si N contient un renversement, alors $N = \mathrm{SO}(E)$.

e) Soit $n = 3$. Montrer que, si $N \neq \{\mathrm{id}_E\}$ alors N contient une rotation d'angle π/k, pour $k \in \mathbb{N}$ assez grand. En déduire que $N = \mathrm{SO}(E)$.

f) Soit $n = 2$. Justifier que $\mathrm{SO}(E)$ n'est pas simple.

Corrigé 1. On utilise la forme normale des automorphismes orthogonaux, le fait que pour $k \in \mathbb{N}$ donné toutes les symétries d'axe k-dimensionnel sont conjuguées et que les renversements engendrent $\mathrm{SO}(E)$.

a) Soit $f \in \mathrm{SO}(E)$. D'après le théorème de réduction en forme normale des automorphismes orhogonaux, il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{diag}(\mathbb{I}_r, R_{\vartheta_1}, \ldots, R_{\vartheta_s})$ pour certains $s \in \mathbb{R}$, $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_s \in \mathbb{R}$, avec $r = 2n - s$, où R_ϑ est la matrice de rotation :

$$R_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

On considère le chemin $\gamma : [0,1] \to \mathrm{SO}(E)$ qui associe à $t \in [0,1]$ l'endomorphisme dont la matrice en la base $\mathcal{B}$ est $\mathrm{diag}(\mathbb{I}_r, R_{t\vartheta_1}, \ldots, R_{t\vartheta_s})$. L'application γ est continue par continuité du produit matriciel et des applications sinus et cosinus. De cette manière $\gamma(0) = f$ et $\gamma(1) = \mathrm{id}_E$, donc $\mathrm{SO}(E)$ est connexe par arcs.

b) On voit que le déterminant d'une matrice orthogonale vaut 1 ou -1. Donc le groupe $\mathrm{O}(E)$ possède au moinx deux composantes connexes car son image par l'application (continue) déterminant est $\{-1, 1\}$; on voit que l'application déterminant est surjective en considérant le déterminant de id_E et d'une réflexion $\tau \in \mathrm{O}(E)$. Notons

$\mathrm{O}^-(E) = \det^{-1}(\{-1\})$, on a donc $\tau \in \mathrm{O}^-(E)$. On voit que l'application $f \mapsto \tau f$ fournit un homéomorphisme entre $\mathrm{O}^-(E)$ et $\mathrm{SO}(E)$. Ainsi, comme $\mathrm{SO}(E)$ est connexe, $\mathrm{O}^-(E)$ l'est aussi. Ainsi $\mathrm{O}(E)$ possède exactement deux composantes connexes.

c) Si $n = 4$, pour les composantes de $\mathrm{O}(E)$, on peut se donner id_E et τ comme précédemment. Pour le chemin dans $\mathrm{SO}(E)$, on peut prendre $t \mapsto f_t$ où, uné base orthonormée $\mathcal{B}$ de E étant fixées, f_t satisfait :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f_t) = \begin{pmatrix} \cos(t\pi) & \sin(t\pi) & 0 & 0 \\ -\sin(t\pi) & \cos(t\pi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(t\pi) & \sin(t\pi) \\ 0 & 0 & -\sin(t\pi) & \cos(t\pi) \end{pmatrix}.$$

d) Ceci est parce que, si N contient un renversement ρ, comme N est normal, il contient tous les conjuguées de ρ. Puis, tous les renversements sont conjugués donc N dans ce cas contient tous les renversements. Ainsi $N \subset \mathrm{SO}(E)$ contient un système de générateurs de $\mathrm{SO}(E)$ donc $N = \mathrm{SO}(E)$.

e) La preuve de cet énoncé constitue la démonstration du fait que $\mathrm{SO}(E)$ est un groupe simple si $n = 3$, on renvoie au cours pour celle-ci.

f) On sait que, si $n = 2$, $\mathrm{SO}(E)$ est isomorphe au groupe des nombres complexes de module 1, ce groupe est donc commutatif et tous ses groupes sont normaux. Il suffit donc d'exhiber un sous groupe N de $\mathrm{SO}(E)$, non réduit à l'identité et différent de $\mathrm{SO}(E)$. Par exemple le sous groupe engendré par la $-\mathrm{id}_E$ convient car il possède deux éléments. On peut aussi prendre une rotation ρ d'angle π/n pour $n > 1$ donné et considérer le sous groupe engendré par ρ : il s'agit d'un groupe cyclique d'ordre n qui est normal et non trivial dans $\mathrm{SO}(E)$.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathcal{E} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$.

1) Donner $\dim(\mathcal{E})$ et fournir une base de $E = \overrightarrow{\mathcal{E}}$.

2) Soit $X = \mathcal{E} \cap \mathbb{R}_+^n$. Montrer que X est convexe et compact.

Soit $O = \frac{1}{n}(1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$, $(E_1, \dots, E_n)$ base canonique de $\mathbb{R}^n$ et, pour $i \in [\![1, n]\!]$, $\vec{u}_i = \overrightarrow{OE_i}$.

3) Donner un repère cartésien $\mathcal{R}$ de $\mathcal{E}$ constitué de O et de vecteurs $\vec{u}_i$.

4) Soit $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ affine telle que $\varphi(E_i) = E_{i+1}$ pour $i = 1, \dots, n-1$ et $\varphi(E_n) = E_1$.

   a) Montrer que φ est bijective puis trouver $\varphi(O)$ et $\varphi(X)$.

   b) Donner $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{R}}(\varphi)$ puis $N = \mathrm{Mat}_{\mathcal{S}}(\varphi)$ où $\mathcal{S}$ est un repère affine de $\mathcal{E}$.

   c) Dire si $\vec{\varphi} \in \mathrm{SL}(E)$.

5) Soit G le groupe des transformations affines de $\mathcal{E}$ fixant X. Montrer $\mathfrak{S}_n \subset G$.

6*) Soit $\varphi \in G$. Montrer que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il existe un et un seul j tel que $\varphi(E_i) = E_j$. En déduire $G = \mathfrak{S}_n$.

Corrigé 2. On considère $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure canonique d'espace affine et $\mathcal{E}$ comme sous espace affine de cette structure. On note $P = (p_1, \ldots, p_n)$ un élément de $\mathcal{E}$. Un vecteur de $\mathbb{R}^n = \overrightarrow{\mathbb{R}}^n$ est noté $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$. Une observation utile est que $\mathcal{E} = \mathrm{aff}(E_1, \ldots, E_n)$.

1) La direction E est un hyperplan de $\overrightarrow{\mathbb{R}}^n$, à savoir :

$$E = \{\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \overrightarrow{\mathbb{R}}^n \mid v_1 + \cdots + v_n = 0\}.$$

En particulier $\dim(\mathcal{E}) = n-1$. Une base de E est fournie par exemple par les vecteurs $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{n-1})$ où, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, on aurait posé $\vec{v}_i = (v_{i,1}, \ldots, v_{i,n}) \in \mathbb{R}^n$ avec $v_{i,j} = \delta_{i,j}$ pour $i, j \in [\![1, n-1]\!]$ et $v_{i,n} = -1$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$. Par exemple $v_1 = (1, 0, \ldots, 0, -1)$, $v_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0, -1)$ et ainsi de suite.

2) La partie X de $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^n$ est fermée car elle est intersection de l'hyperplan affine $\mathcal{E}$ et de n demi-plans, à savoir H_i pour $i \in [\![1, n]\!]$, où $H_i = \{P \in \mathbb{R}^n \mid p_i \geq 0\}$. Elle est aussi bornée car les conditions $p_i \geq 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et $p_1 + \cdots + p_n = 1$ forcent $0 \leq p_i \leq 1$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. La partie X est convexe puisque, si on se donne $P, Q \in X$ et $t \in [0, 1]$ alors $tp_i + (1-t)q_i \geq 0$ et :

$$\sum_{i=1}^{n}(tp_i + (1-t)q_i) = t\sum_{i=1}^{n} p_i + (1-t)\sum_{i=1}^{n} q_i t + 1 - t = 1,$$

donc $tP + (1-t)Q \in X$. Ceci revient à dire que, si on se donne $P, Q \in X$ alors pour tout $t \in [0, 1]$ on a $\mathrm{Bary}((P, Q), (Q, (1-t))) \in X$, ce qui équivaut à dire que X est convexe.

3) On considère $\mathcal{R} = (O, \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{n-1})$. Tous les vecteurs $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ appartiennent à E, $\dim(\mathcal{E}) = n-1$ et $O \in \mathcal{E}$ donc il suffit de vérifier que la famille $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{n-1})$ est libre, ce qui revient à dire que $\mathrm{aff}(O, E_1, \ldots, E_{n-1}) = \mathcal{E}$. Or on voit que $E_n \in \mathrm{aff}(O, E_1, \ldots, E_{n-1})$ et on a observé que $\mathcal{E} = \mathrm{aff}(E_1, \ldots, E_n)$ donc aussi $\mathrm{aff}(O, E_1, \ldots, E_{n-1}) = \mathcal{E}$.

4) L'application φ est bien déterminée car $\mathcal{S} = (E_1, \ldots, E_n)$ est un repère affine de $\mathcal{E}$.

   a) L'application φ est bijective car elle envoie le repère affine $\mathcal{S}$ de $\mathcal{E}$ sur lui-même. On a $\varphi(O) = O$ car O et le barycentre des points de $\mathcal{S}$ affectés du poids $1/n$ donc $\varphi(O)$ est aussi barycentre des points de $\mathcal{S}$ affectés du poids $1/n$ du moment que $\varphi(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$.

   b) La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{S}}(\varphi)$ est $(b_{i,j})$ avec $b_{i,j} = 1$ si $i \in [\![2, n]\!]$ et $j = i-1$ ou $(i, j) = (1, n)$, autrement $b_{i,j} = 0$, ce qui s'écrit :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{S}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En le repère $\mathcal{R} = (O, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{n-1})$ on a $\varphi(O) = O$ et $\vec{\varphi}(\vec{u}_i) = \vec{u}_{i+1}$ pour tout $i \in [\![1, n-2]\!]$, puis $\vec{\varphi}(\vec{u}_{n-1}) = \vec{u}_n = -\vec{u}_1 - \dots - \vec{u}_{n-1}$. Donc on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{R}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

c) Pour voir si $\vec{\varphi} \in \mathrm{SL}(E)$ on peut regarder $\mathrm{Mat}_{\mathcal{S}}(\varphi)$. En effet, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{S}}(\varphi)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{R}}(\varphi)$ sont semblables donc ont même déterminant et comme φ a un point fixe O et la matrice de $\vec{\varphi}$ en la base $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{n-1})$ de E est la sous matrice de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{R}}(\varphi)$ constituée des $n-1$ dernières lignes et colonnes, on a $\det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{R}}(\varphi)) = \det(\vec{\varphi})$. Or $\mathbb{I}_n$ s'obtient à partir de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{S}}(\varphi)$ par $n-1$ échanges de ligne, donc $\det(\vec{\varphi}) = (-1)^{n-1}$ et $\vec{\varphi} \in \mathrm{SL}(E)$ ssi n est impair.

5) De la même façon que dans la question précédente, si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est une permutation de $\{1, \dots, n\}$, on peut considérer l'unique automorphisme affine φ_σ de $\mathcal{E}$ tel que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on ait $\varphi_\sigma(E_i) = E_{\sigma(i)}$. Ceci est bien posé car $\mathcal{S}$ est un repère affine de $\mathcal{E}$. Comme X est enveloppe convexe des points de $\mathcal{S}$ et φ_σ permute les points de $\mathcal{S}$, on a $\varphi_\sigma(X) = X$. L'application $\sigma \mapsto \varphi_\sigma$ définit une inclusion $\mathfrak{S}_n \subset G$.

6*) Soit $\varphi \in G$. On remarque d'abord que $\varphi(X) = X$ contient un repère affine de $\mathcal{E}$ donc l'application affine φ est une bijection. Ensuite, notons pour $i \in [\![1, n]\!]$, $\varphi(E_i) = F_i = (f_{i,j})_{j \in [\![1,n]\!]} \in X \subset \mathbb{R}^n$, pour certains $f_{i,j} \in \mathbb{R}$. On a :

$$0 \le f_{i,j} \le 1, \qquad \text{pour tout } i, j \in [\![1, n]\!], \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} f_{i,j} = 1, \qquad \text{pour tout } i \in [\![1, n]\!]. \tag{2}$$

Remarquons que tout $P \in X$ est barycentre à poids positif de $(E_1, \dots, E_n)$, donc comme $\varphi(X) = X$ et $\varphi(E_i) = F_i$ pour tout $i[\![1, n]\!]$, tout point de X est barycentre à poids positif de $(F_1, \dots, F_n)$. En particulier E_1 l'est. Donc il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n$ tel que $E_1 = \mathrm{Bary}((F_i, \lambda_i)_{i \in [\![1,n]\!]})$, c'est-à-dire :

$$(1, 0, \dots, 0) = (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{i,1}, \dots, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{i,n}),$$

et l'on peut supposer $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. Soit alors :

$$f_{0,1} = \max\{f_{1,1}, \dots, f_{n,1}\}.$$

On a $0 \le f_{0,1} \le 1$ et :

$$1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{i,1} \le \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{0,1} = f_{0,1},$$

donc $f_{0,1} = 1$. Ainsi il existe $j_1 \in [\![1, n]\!]$ tel que $f_{j_1,1} = 1$. Mais alors les conditions (1) et (2) impliquent $f_{j_1,k} = 0$ pour tout $k \in [\![2, n]\!]$. Autrement dit, $\varphi(E_{j_1}) = F_{j_1} = E_1$.

Ce procédé peut être mis en place non seulement pour E_1 sinon aussi pour $E_2, \dots, E_n$ et donne lieu à des indices $j_1, \dots, j_n \in [\![1,n]\!]$ tels que, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ on ait $\varphi(E_{j_k}) = F_{j_k} = E_k$. Nous avons déjà observé que φ est bijective donc l'application $k \mapsto j_k$ est une bijection de $[\![1,n]\!]$, dont l'inverse est notée σ. On a donc $\varphi(E_k) = E_{\sigma(k)}$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ et $\varphi = \varphi_\sigma$ en la notation de la question précédente : ceci montre que $G = \mathfrak{S}_n$.

Exercice 3. Soit $\mathcal{E} = \mathbb{Q}^4$ et notons $x = (x_1, \dots, x_4) \in \mathcal{E}$. Soit :

$$\mathcal{F} = \{x \in \mathcal{E} \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0\}.$$

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathrm{M}_{2,4}(\mathbb{R})$ et $a = (a_{1,0}, a_{2,0}) \in \mathbb{Q}^2$ puis :

$$\mathcal{G} = \{x \in \mathcal{E} \mid a_{i,1}x_1 + \dots + a_{i,4}x_4 = a_{i,0}, \forall i = 1,2\}.$$

1. Est-ce que $\mathcal{G}$ est un sous espace affine de $\mathcal{E}$ pour tout choix de A et a ?
2. À quelle condition sur A et a, $\mathcal{G}$ est un plan affine ? Est-elle satisfaite si $a_{1,j} = 1$ et $a_{2,j} = j$ pour tout $j \in [\![0,4]\!]$? Mêmes questions pour « plan affine parallèle à $\mathcal{F}$ ».
3. À quelle condition sur A et a, a-t-on $\mathrm{aff}(\mathcal{G} \cup \mathcal{F}) = \mathcal{E}$? Est-elle satisfaite si $a_{1,j} = 5 - j$ et $a_{2,j} = 2$ pour tout $j \in [\![0,4]\!]$?
4. Soit $a_{1,j} = 1$ et $a_{2,j} = (-1)^j$ pour tout $j \in [\![0,4]\!]$. Trouver des équations et un repère cartésien de $\mathrm{aff}(\mathcal{F} \cup \mathcal{G})$, puis une application affine bijective $\mathbb{Q} \to \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$.

Corrigé 3. On rappelle qu'une partie non vide $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ est un sous espace affine si, étant donné $O \in \mathcal{A}$, les vecteurs $\overrightarrow{OP}$ pour $P \in \mathcal{A}$ forment un sous espace vectoriel de $E = \overrightarrow{\mathcal{E}}$.

1. Pour que $\mathcal{G}$ soit un sous espace affine de $\mathcal{E}$, il faut et il suffit que les matrices A et $A' = (A \mid a)$ aient le même rang. Ceci n'arrive pas toujours, par exemple si $A = 0$ et $a \neq 0$ alors $\mathcal{G} = \varnothing$ n'est pas un sous espace affine de $\mathcal{E}$.
2. La condition pour que $\mathcal{G}$ soit un plan affine est que A ait rang 2. La condition pour que $\mathcal{G}$ soit un plan affine parallèle à $\mathcal{F}$ est que A ait rang 2 et que aussi la matrice suivante ait rang 2 :

   $$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \end{pmatrix}.$$

   Si $a_{1,j} = 1$ et $a_{2,j} = j$ pour tout $j \in [\![0,4]\!]$ alors $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A') = 2$ donc $\mathcal{G}$ est un plan affine, qui est en fait parallèle à $\mathcal{F}$ et distinct de $\mathcal{F}$.
3. Déjà si $\dim(\overrightarrow{\mathcal{F}} + \overrightarrow{\mathcal{G}}) = 4$, i.e. si $\overrightarrow{\mathcal{F}} + \overrightarrow{\mathcal{G}} = \overrightarrow{\mathcal{E}} = E$ alors $\mathrm{aff}(\mathcal{G} \cup \mathcal{F}) = \mathcal{E}$. Ainsi, si B a rang 4, on a $\mathrm{aff}(\mathcal{G} \cup \mathcal{F}) = \mathcal{E}$. Sinon, on doit avoir $\dim(\overrightarrow{\mathcal{F}} + \overrightarrow{\mathcal{G}}) = 3$ i.e. B doit être de

rang 3 et $\mathcal{G} \cap \mathcal{F}$ doit être vide, sans que $\mathcal{F}$ soit vide. Ceci équivaut à :

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,0} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,0} \end{pmatrix} = 4, \qquad \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A').$$

Si $a_{1,j} = 5-j$ et $a_{2,j} = 2$ pour tout $j \in [\![0,4]\!]$ alors le rang de la matrice 4×5 ci-dessus est 3 donc la condition n'est pas satisfaite.

4. Pour $a_{1,j} = 1$ et $a_{2,j} = (-1)^j$ pour tout $j \in [\![0,4]\!]$, on trouve la seule équation de $\operatorname{aff}(\mathcal{F} \cup \mathcal{G})$, à savoir $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$. Un repère cartésien de $\operatorname{aff}(\mathcal{F} \cup \mathcal{G})$ est $(P, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ où $P = (1,0,0,0)$ et $\vec{u}_1 = (1,-1,0,0)$, $\vec{u}_2 = (1,0,-1,0)$, $\vec{u}_3 = (1,0,0-1)$. On a aussi les équations indépendentes suivantes de $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$:
$$\begin{cases} 2\,x_3 + 2\,x_4 = 3 \\ x_2 + x_4 = 1 \\ 2\,x_1 - 2\,x_4 = -3 \end{cases}$$
Par conséquent $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est une droite affine et toute application affine injective $\mathbb{Q} \to \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est une bijection. On en écrit une :
$$t \mapsto (t, -t - 1/2, -t, t + 3/2).$$

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}$ et notons $\mathrm{O}(n)$ le groupe des matrices réelles orthogonales de taille n. Considérons un sous groupe compact $G \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ qui contient $\mathrm{O}(n)$.

1. Soit $M \in G$. Justifier qu'il existe $S \in \mathrm{S}_n^{++} \cap G$ telle que $MS^{-1} \in \mathrm{O}(n)$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ valeur propre de S. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, montrer que λ^k est valeur propre d'un élément de G.
3. Utiliser la compacité de G pour déduire que $|\lambda| = 1$.
4. Conclure que $S = \mathbb{I}_n$ puis que $G = \mathrm{O}(n)$.

Corrigé 4. On utilise la décomposition polaire.

1. Il existe (R, S) avec R orthogonale et S symétrique définie positive telles que $M = RS$. Alors $R = MS^{-1}$ est orthogonale. Aussi, $S = R^{-1}M$ appartient à G car $R \in \mathrm{O}(n) \subset G$, $M \in G$ et G est un groupe. Donc $S \in \mathrm{S}_n^{++} \cap G$.
2. Pour toute valeur propre λ de S, on a $\lambda > 0$ car S est définie positive. Aussi, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, λ^k est valeur propre de S^k et $S^k \in G$ puisque G est un groupe.
3. Maintenant, $(S^k)_{k\in\mathbb{N}}$ admet une suite extraite convergente $(S^{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$, disons vers $T \in G$, car G est compact. En fait, si v est vecteur propre pour la valeur propre λ de S, on a, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $S^k v = \lambda^k v$ donc :
$$Tv = \lim_{j\to\infty} (S^{k_j})v = \lim_{j\to\infty} (S^{k_j} v) = \lim_{j\to\infty} (\lambda^{k_j} v) = \lim_{j\to\infty} (\lambda^{k_j})v,$$

par continuité du produit matriciel. Comme $v \neq 0$, on en déduit que (λ^{k_j}) converge. Mais, pour que la suite (λ^{k_j}) soit convergente on doit avoir $\lambda \leq 1$ car sinon (λ^{k_j}) n'est pas bornée. Puis, $(S^{-k})_{k\in\mathbb{N}}$ admet aussi une suite extraite convergente donc (λ^{-k_j}) converge, par conséquent $\lambda \geq 1$. Donc $\lambda = 1$.

4. Comme toute valeur propre de S vaut 1 et S est une matrice symétrique définie positive, on a que S est l'identité i.e., $S = \mathbb{I}_n$ et $M = R$ est orthogonale. Ceci arrive quel que soit $M \in G$ donc $G = \mathrm{O}(n)$.