Géométrie Algébrique – Master 1

Temps disponible : 2 heures

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur un corps $\mathbb{k}$ et soit A, B, C, A', B', C' six points deux à deux disjoints du plan projectif $\mathbb{P}(E)$.

i) Montrer que, si les trois points $(AB)\cap(A'B')$, $(AC)\cap(A'C')$, $(BC)\cap(B'C')$ sont alignés, alors (AA'), (BB'), (CC') sont concourantes.

ii) Définir l'espace dual de $\mathbb{P}(E)$ et l'orthogonal $\mathbb{P}(F)^\perp$ d'un sous espace projectif $\mathbb{P}(F)$ de $\mathbb{P}(E)$.

iii) Utiliser la dualité pour déduire de i) que, si (AA'), (BB'), (CC') sont concourantes, alors $(AB)\cap(A'B')$, $(AC)\cap(A'C')$, $(BC)\cap(B'C')$ sont alignés.

On dira, si les conditions équivalentes i) et iii) sont satisfaites, que les six points satisfont la condition de Désargues.

Soit $E = \mathbb{k}^3$ et $A = (1:0:0)$, $B = (0:1:0)$, $C = (0:0:1)$.

iv) Soit $A' = (0:1:1)$, $B' = (1:0:1)$, $C' = (c_0 : c_1 : c_2)$. Pour quelles valeurs de c_0, c_1, c_2, les six points satisfont la condition de Désargues ?

Corrigé 1. On écrit la réponse uniquement pour la dernière question. On calcule :

$$\begin{aligned}(AA') &= \{(x_0 : x_1 : x_2) \mid x_1 - x_2 = 0\},\\ (BB') &= \{(x_0 : x_1 : x_2) \mid x_0 - x_2 = 0\},\\ (CC') &= \{(x_0 : x_1 : x_2) \mid c_1x_0 - c_0x_1 = 0\}.\end{aligned}$$

Donc $(AA')\cap(BB') = (1:1:1)$. On doit donc imposer que (CC') passe par $(1:1:1)$, donc $c_0 = c_1$.

Exercice 2. Soit $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(\mathbb{Q}^4)$. Pour $x = (x_0, \dots, x_3) \in \mathbb{Q}^4 \setminus \{0\}$, notons $[x] = (x_0 : \dots : x_3) \in \mathbb{P}^3$. Posons :

$$\begin{aligned}L_1 &= \{[x] \in \mathbb{P}^3 \mid x_2 = x_3 = 0\},\\ L_2 &= \{[x] \in \mathbb{P}^3 \mid x_0 = x_1 = 0\},\\ L_3 &= \{[x] \in \mathbb{P}^3 \mid x_0 + x_3 = x_1 + x_2 = 0\}.\end{aligned}$$

i) Montrer que L_1, L_2, L_3 sont trois droites de $\mathbb{P}^3$ deux à deux disjointes.

ii) Soit $A_1 = (a_0 : a_1 : 0 : 0) \in L_1$ et $A_2 = (0:0:a_2:a_3) \in L_2$. Trouver les équations de $L = (A_1A_2)$ puis de tous les plans contenant L.

iii) Quelle est l'équation du plan P engendré par A_1 et L_2 ? Calculer $A_3 = P \cap L_3$ puis $(A_1A_3) \cap L_2$. Trouver un nombre infini de droites ayant intersection non vide avec L_1, L_2 et L_3.

Corrigé 2. Pour répondre à la première question, on écrit simplement les intersections, par exemple :

$$\begin{aligned} L_1 \cap L_3 &= \{[x] \in \mathbb{P}^3 \mid x_2 = x_3 = x_0 + x_3 = x_1 + x_2 = 0\} = \\ &= \{(x_0 : x_1 : 0 : 0) \in \mathbb{P}^3 \mid x_0 = x_1 = 0\} = \varnothing. \end{aligned}$$

ii) Nous écrivons les équations de A_1 et de A_2 :

$$A_1 : \begin{cases} a_0x_1 - a_1x_0 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \qquad A_2 : \begin{cases} a_2x_3 - a_3x_2 = 0 \\ x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

Les équations apparaissant dans la première ligne des systèmes définissant A_1 et A_2 sont satisfaites par A_2 et A_1, donc par tout point de $L = (A_1A_2)$. Elles sont indépendantes, donc elles définissent L, i.e. :

$$L : \begin{cases} a_0x_1 - a_1x_0 = 0 \\ a_2x_3 - a_3x_2 = 0 \end{cases}$$

Un plan contenant L satisfait une équation qui est une combinaison linéaire des deux équations ci-dessus, donc un tel plan s'écrit :

$$\{[x] \in \mathbb{P}^3 \mid \lambda a_0x_1 - \lambda a_1x_0 + \mu a_2x_3 - \mu a_3x_2 = 0\},$$

pour un certain $(\lambda, \mu) \in \mathbb{Q}^2 \setminus \{0\}$.

iii) Le plan engendré par A_1 et L_2 est le plan contenant les trois points $(a_0 : a_1 : 0 : 0)$, $(0 : 0 : 1 : 0)$ et $(0 : 0 : 0 : 1)$. Il s'agit donc du plan d'équation :

$$\det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = a_0x_1 - a_1x_0 = 0$$

Regardons $P \cap L_3$. On trouve :

$$\begin{aligned} A_3 = P \cap L_3 &= \{[x] \mid a_0x_1 - a_1x_0 = x_0 + x_3 = x_1 + x_2 = 0\} = \\ &= \{(a_0 : a_1 : -a_1 : -a_0)\}. \end{aligned}$$

Cherchons les équations de la droite (A_1A_3). Nous avons besoin de deux équations indépendantes. Cette droite étant contenue dans P, l'une de ces équations peut être choisie comme l'équation de P, i.e. $a_1x_0 - a_1x_0 = 0$. Écrivons la deuxième sous la forme $\alpha_0x_0 + \dots + \alpha_3x_3 = 0$, pour certains $\alpha_0, \dots, \alpha_3 \in \mathbb{Q}$, pas tous nuls. Imposons le passage par A_1 et A_3 :

$$\begin{cases} \alpha_0a_0 + \alpha_1a_1 = 0 \\ \alpha_0a_0 + \alpha_1a_1 - \alpha_2a_1 + \alpha_3a_0 = 0 \end{cases}$$

On peut choisir $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 = a_0$, $\alpha_3 = -a_1$, donc :

$$(A_1A_3) : \begin{cases} a_0x_1 - a_1x_0 = 0 \\ a_0x_2 - a_1x_3 = 0 \end{cases}$$

On trouve enfin :

$$(A_1A_3) \cap L_2 = \{((0:0:a_1:a_0)\}.$$

Le corps $\mathbb{Q}$ étant infini, on trouve une infinité de points A_1 de la forme $(a_0 : a_1) = (1 : a)$, pour $a \in \mathbb{Q}$. Chacun de ces points détermine un plan P puis un point A_3 puis une droite (A_1A_3) qui recoupe L_1, L_2 et L_3. Il s'agit de la droite passant par $(1 : a : 0 : 0) \in L_1$ et $(0 : 0 : a : 1) \in L_2$, qui passe aussi par $(1 : a : -a : -1) \in L_3$. Ces droites sont toutes distinctes car leurs intersections avec L_1 sont distinctes.

Exercice 3. Soit A, B, C, D, E, F un hexagone régulier, M un point de (AC) et N un point de (CE). On suppose que B, M et N sont alignés.

i) On pose $G = (AC) \cap (BE)$. Montrer que

$$\frac{\overline{GM}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{CN}}{\overline{NE}} \cdot \frac{\overline{EB}}{\overline{BG}} = -1.$$

ii) Si

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{CE}} = r,$$

quelles sont les valeurs possibles de r ?

Corrigé 3. L'hexagone est régulier donc on les côtés opposés sont parallèles aussi bien que les segments joignant deux paires de sommets opposés.

i) Les points B, M, N sont alignés donc Menelaüs appliqué au triangle E, G, C dit :

$$\frac{\overline{MG}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NE}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{BG}} = 1.$$

On inverse trois signes, pour MG, NC et EB. On tombe donc sur le résultat demandé.

ii) Du moment que l'hexagone est régulier, on trouve :

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{BG}} = 4.$$

Aussi, $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{NE}$ et $\overrightarrow{CN} = r\overrightarrow{CE}$, ainsi $(1-r)\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{NE}$ donc :

$$\frac{1-r}{r}\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{NE}, \qquad \text{i.e. :} \qquad \frac{\overline{NC}}{\overline{NE}} = \frac{r}{r-1}.$$

Donc nous avons :

$$\frac{\overline{GM}}{\overline{MC}} = \frac{1}{4}\frac{\overline{NE}}{\overline{NC}} = \frac{1-r}{4r}.$$

En posant $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AG}$ et en prenant $(A, \overrightarrow{u})$ comme repère affine de (AC), on trouve bien sûr $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{u}$ donc :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AM} &= r\overrightarrow{AC} = 2r\overrightarrow{u}, \\
\overrightarrow{GM} &= \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{u} = (2r-1)\overrightarrow{u}, \\
\overrightarrow{MC} &= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM} = 2(1-r)\overrightarrow{u}, \\
\overrightarrow{GM} &= \frac{1-r}{4r}\overrightarrow{MC} = \frac{(r-1)^2}{2r}\overrightarrow{u}.
\end{aligned}$$

On en déduit :
$$(2r-1) = \frac{(r-1)^2}{2r}.$$
Donc $r = \pm\sqrt{3}/3$.

Exercice 4. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine sur un corps $\mathbb{k}$, et soient $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ des sous espaces affines de directions F et G.

i) Soit $(y_0, z_0) \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$. Montrer que
$$\mathrm{Aff}(\mathcal{F} \cup \mathcal{G}) = y_0 + \mathbb{k}\overrightarrow{y_0z_0} + F + G.$$

ii) Montrer que
- si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \varnothing$, alors $\dim\mathrm{Aff}(\mathcal{F} \cup \mathcal{G}) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$
- si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \varnothing$, alors $\dim\mathrm{Aff}(\mathcal{F} \cup \mathcal{G}) = \dim F + \dim G + 1 - \dim(F \cap G)$

iii) Dans $\mathcal{E} = \mathbb{R}^4$ on considère les sous espaces affines
$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= \{(1-\lambda, 3+3\lambda, \lambda, 1+\lambda) | \lambda \in \mathbb{R}\}\\ \mathcal{G} &= \{(x,y,z,t) | x+y+z+t = 1, x+2z = 0\}.\end{aligned}$$
Déterminer des équations définissant $\mathrm{Aff}(\mathcal{F} \cup \mathcal{G})$.

Corrigé 4. Rappelons que, si S est une partie de $\mathcal{E}$, $\mathrm{Aff}(S)$ est le plus petit sous espace affine de $\mathcal{E}$ contenant S.

i) Soit $\mathcal{H} = y_0 + \mathbb{k}\overrightarrow{y_0z_0} + F + G$. Il s'agit d'un sous espace affine de $\mathcal{E}$, car en fixant y_0 comme origine, donc $\overrightarrow{\mathcal{E}} = \{\overrightarrow{y_0x} \mid x \in \mathcal{E}\}$ on a :
$$\{\overrightarrow{y_0y} \mid y \in \mathcal{H}\} = \mathbb{k}\overrightarrow{y_0z_0} + F + G,$$
ce qui forme un sous espace vectoriel de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.

Bien sûr, $\mathcal{H}$ contient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, car :
$$\begin{aligned}&\mathcal{F} = y_0 + F \subset \mathcal{H},\\ &\mathcal{G} = z_0 + G = y_0 + \overrightarrow{y_0z_0} + G \subset \mathcal{H}.\end{aligned}$$

De plus, si un sous espace affine $\mathcal{K}$ contient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, i.e., $\mathcal{K}$ contient $y_0 + F$ et $z_0 + G$, et $\mathcal{K}$ contient aussi la droite (y_0z_0), i. e. $y_0 + \mathbb{k}\overrightarrow{y_0z_0}$. Ainsi, la direction de $\mathcal{K}$ contient F, G et $\mathbb{k}\overrightarrow{y_0z_0}$, donc la somme de ces espaces, donc $\mathcal{H} \subset \mathcal{K}$. Ainsi $\mathcal{H}$ est le plus petit sous espace affine de $\mathcal{E}$ contenant $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, i. e. $\mathrm{Aff}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \mathcal{H}$.

ii) On a $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \varnothing$ si et seulement si $\overrightarrow{y_0z_0} \in F + G$. En effet, déjà si $\overrightarrow{y_0z_0} \in F + G$ alors on écrit $\overrightarrow{y_0z_0} = \overrightarrow{y_0w} + \overrightarrow{wz_0}$ avec $\overrightarrow{y_0w} \in F$ et $\overrightarrow{wz_0} \in G$, donc $w \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Et réciproquement, s'il existe $w \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, on écrit $\overrightarrow{y_0z_0} = \overrightarrow{y_0w} + \overrightarrow{wz_0}$ et on voit que $\overrightarrow{y_0z_0} \in F + G$.

Nous avons alors :
$$\begin{aligned}&\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \varnothing \Leftrightarrow \dim(\mathbb{k}\overrightarrow{y_0z_0} + F + G) = \dim(F+G) + 1,\\ &\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \varnothing \Leftrightarrow \dim(\mathbb{k}\overrightarrow{y_0z_0} + F + G) = \dim(F+G).\end{aligned}$$

On obtient le résultat en combinant ceci avec :
$$\dim(G+H) = \dim(G) + \dim(H) - \dim(G \cap H).$$

iii) On calcule :

$$\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \left\{ (1-\lambda, 3+3\lambda, \lambda, 1+\lambda) \middle| \left\{ \begin{array}{l} 1-\lambda+2\lambda = 0, \\ 1-\lambda+3+3\lambda+\lambda+1+\lambda = 1 \end{array} \right. \right\},$$

ce qui donne :

$$\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \{(2, 0, -1, 0)\}.$$

Posons $w = (2, 0, -1, 0)$. Nous avons alors $\mathrm{Aff}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = w + G + F$, un espace affine de dimension 3, i.e. un hyperplan de $\mathbb{R}^4$. Il sera donc défini par une seule équation. Pour la trouver on peut choisir une combinaison des équations qui définissent $\mathcal{G}$, disons a fois la première plus b fois la deuxième, en imposant qu'elle soit satisfaite pour un point de $\mathcal{F}$, autre que w, par exemple $(1, 3, 0, 1)$. Ceci donne :

$$(a+b)x + ay + (a+2b)z + at = a.$$

On trouve donc l'équation $4a + b = 0$. Prenons $a = 1$, $b = -4$. Ceci donne l'équation :

$$-3x + y - 7z + t = 1.$$

Cette équation est satisfaite pour tout point de $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{G}$, c'est donc une équation qui définit $\mathrm{Aff}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$.