Géométrie – Master 1 PMG

Temps disponible : 2 heures

Toutes les réponses doivent être justifiées. Il est possible d'admettre la réponse à une question afin de répondre aux questions suivantes.

Exercice 1 (Questions de cours)**.** On souhaite montrer que $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est un groupe simple.

a) Définir *groupe simple*. Dire pour quels $n \in \mathbb{N}$ le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est simple.

b) Justifier que $M \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est une rotation d'angle ϑ ssi $\mathrm{tr}(M) = 1 + 2\cos(\vartheta)$.

c) Soit $N \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \smallsetminus \{\mathbb{1}_3\}$. Justifier que $\Phi(M) = \mathrm{tr}(MNM^{-1}N^{-1})$ définit une application $\Phi : \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \to [a, 3]$ pour un certain $a \in [-1, 3[$.

d) Soit $H \neq \{\mathbb{1}_3\}$ sous groupe normal de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ et $\mathbb{1}_3 \neq N \in H$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $M_n \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ tel que $M_n N M_n^{-1} N^{-1} \in H$ est une rotation d'angle π/n.

e) Conclure que H contient un renversement puis justifier que $H = \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 2 (Questions rapides)**.** Soit D, D' droites d'un plan euclidien affine dirigé par E. Soit σ et σ' réflexions orthogonales d'axe D, D'.

1. Montrer que, si D et D' sont parallèles, $\sigma \circ \sigma'$ est une translation. De quel vecteur ?
2. Montrer que autrement $\sigma \circ \sigma'$ est une rotation. De quel centre ? De quel angle ?
3. Soit $\vec{u} \in E$. Montrer que, si $\vec{u} \perp D$, $\sigma \circ t_{\vec{u}}$ est une réflexion d'axe parallèle à D.
4. Montrer que autrement $\sigma \circ t_{\vec{u}}$ est la composition d'une réflexion τ et d'une translation de direction parallèle à l'axe de réflexion de τ. Quel est cet axe ?

Exercice 3. Soit $\mathbb{K}$ un corps (commutatif) et considérons la structure affine canonique de $\mathbb{K}^n$. Soit $\varphi : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^4$ et $\psi, \xi : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^2$ définies par :

$$\varphi(y_1, y_2) = (y_1 + 2y_2 + 1, 2y_1 + 3y_2 - 2, 3y_1 + 4y_2 + 3, 4y_1 + 5y_2 - 4),$$
$$\psi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_3 - x_4 - 2, x_1 - x_4 + x_3 + 1),$$
$$\xi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_3 - x_2 - 2, x_1 - x_4 + 1).$$

Soit $\mathcal{G} = \xi^{-1}(\{(5,5)\})$ et $\mathcal{F} = \mathrm{Im}(\varphi)$.

1. Justifier que $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ sont des sous espaces affines de $\mathbb{K}^4$.
2. Calculer $\dim(\mathcal{F})$ et $\dim(\mathcal{G})$ puis les directions de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$. Montrer $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \varnothing$.
3. Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{K}^2$ la droite affine d'équation $a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_0 = 0$ et $\mathcal{F}'$ l'image de $\varphi|_{\mathcal{D}}$. Dire à quelle condition sur (a_0, a_1, a_2) on a $\mathrm{aff}(\mathcal{F}', \mathcal{G}) = \mathbb{K}^4$.
4. Quel est le rang de $\overrightarrow{\varphi \circ \psi}$? Est-ce qu'il dépend de la caractéristique de $\mathbb{K}$?
5. Dire si $\psi \circ \varphi$ et $\xi \circ \varphi$ sont des bijections affines ; autrement en trouver l'image.
6. Justifier que $\xi \circ \varphi$ possède un unique point fixe puis étudier les points fixes de $\psi \circ \varphi$.

Exercice 4. Munissons $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|M\|^2 = \mathrm{tr}(M^t M)$. On veut montrer :

$$\inf\{\|M\| \big| M \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})\} = \sqrt{n}.$$

1. Déduire de la densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et de la décomposition polaire que $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit $M = PS$ avec $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et S symétrique à valeur propres positives ou nulles.
2. Montrer que $\|M\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$, où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de S.
3. Soit $\mu = \prod_{i=1}^n \lambda_i^2$. Montrer $\mu = \det(S^2) = \det(M)^2$.
4. Utiliser l'inégalité entre moyennes géométrique et arithmétique pour déduire que $\|M\|^2 \geq n\mu^{1/n}$ puis que $\|M\| \geq \sqrt{n}|\det(M)|^{1/n}$.
5. Déduire que, si $M \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, alors $\|M\| \geq \sqrt{n}$ puis calculer $\|M\|$ si $M \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Conclure.