Géométrie Algébrique – Master 1

Temps disponible : 2 heures

Exercice 1 (Questions de cours)**.** Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces affines sur un corps $\mathbb{K}$ et $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ une application.

a) Soit $(A_1, \ldots, A_n) \in \mathcal{E}^n$, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ avec $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Montrer que, si φ est affine, alors :

$$\varphi\text{Bary}((A_i, \lambda_i)_{i=1,\ldots,n}) = \text{Bary}((\varphi A_i, \lambda_i)_{i=1,\ldots,n}).$$

b) Soit $\text{car}(\mathbb{K}) \neq 2$ et supposons que, pour tout $(A, B) \in \mathcal{E}^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$(1) \qquad \varphi\text{Bary}((A, \lambda), (B, 1-\lambda)) = \text{Bary}((\varphi A, \lambda), (\varphi B, 1-\lambda)).$$

Montrer que φ est affine.

c) Soit $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Montrer que toute application φ satisfait à (1). En déduire que (b) n'est pas valide sans la condition $\text{car}(\mathbb{K}) \neq 2$.

Exercice 2. On considère dans $\mathbb{R}^3$ les points $p = (1, 2, 3)$ et $q = (4, 1, 6)$ et les droites

$$D_1 \left\{ \begin{array}{l} x - 4y + 3z = -12 \\ 3x + 2y - 3z = 12 \end{array} \right. \qquad D_2 \left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y - 7z = 0 \\ 4x - 2y + z = -4 \end{array} \right.$$

(1) Montrer qu'il existe une unique droite D passant par p qui rencontre les droites D_1 et D_2, et déterminer son vecteur directeur.

(2) Déterminer un vecteur directeur $\vec{u}_1$ de D_1.

(3) Soit P le plan d'équation $7x - 5z = 5$. Déterminer la projection de q sur P dans la direction de $\vec{u}_1$.

(4) Déterminer l'image du point q par la symétrie par rapport à P dans la direction de $\vec{u}_1$.

(5) On note $\overline{P} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ et $\overline{D} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ les complétés projectifs de D et P. Déterminer les intersections $D \cap P$ et $\overline{D} \cap \overline{P}$.

Exercice 3. Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique $\neq 2$, et soient A, B, C, D quatre points de $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$.

(1) Montrer que dans une carte affine on a l'équivalence

$$[A, B, C, \infty] = -1 \iff C \text{ est le milieu du segment } AB.$$

(2) Montrer que si O est le milieu du segment AB alors

$$[A, B, C, D] = -1 \iff \overline{OA}^2 = \overline{OB}^2 = \overline{OC}.\overline{OD}.$$

(3) Montrer que

$$[A, B, C, D] = -1 \iff \frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}}.$$

TOURNEZ S.V.P.

Exercice 4 (Théorème de Pappus)**.** Soit $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites distinctes d'un plan projectif $\mathbb{P}^2$ sur un corps $\mathbb{K}$. Soit A_i, B_i, C_i trois poins deux à deux distincts de $\mathcal{D}_i$, pour $i = 1, 2$. Nous voulons montrer que $C = A_1B_2 \cap A_2B_1$, $B = A_1C_2 \cap A_2C_1$ et $A = B_1C_2 \cap B_2C_1$ sont alignés.

(1) Soit $O = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$, $D = (A_1B_2) \cap (A_2C_1)$ et $E = (A_1C_2) \cap (C_1B_2)$. Décrire 2 fonctions projectives $p_1 : (A_1B_2) \to \mathcal{D}_1$ et $p_2 : \mathcal{D}_1 \to (B_2C_1)$ dont les propriétés sont résumées par :

$$\begin{array}{llll} p_1(A_1) = A_1, & p_1(C) = B_1, & p_1(D) = C_1, & p_1(B_2) = O, \\ p_2(A_1) = E, & p_2(B_1) = A, & p_2(C_1) = C_1, & p_2(O) = B_2, \end{array}$$

(2) Comparer $p_2 \circ p_1$ à la projection q de (A_1B_2) sur (B_2C_1) centrée en B et en déduire que $q(C) = A$. Conclure.

(3) Énoncer et démontrer l'énoncé dual du théorème de Pappus : « soit u_1, v_1, w_1 droites distinctes concourantes en un point X_1 et u_2, v_2, w_2 concourantes en $X_2 \neq X_1$, alors … ».