Géométrie – Master 1 PMG

Temps disponible : 3 heures

Toutes les réponses doivent être justifiées. Il est possible d'admettre la réponse à une question afin de répondre aux questions suivantes, en indiquant le point admis. Il est conseillé de choisir un maximum de 4 exercices à traiter.

Tous les corps sont commutatifs et de caractéristique différente de 2.

Exercice 1 (Questions de cours)**.** Soit $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ droites distinctes d'un plan projectif $\mathbb{P}^2$ sur un corps $\mathbb{K}$, $O = \mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$. Soit $A, B, C \in \mathcal{D}$ et $A', B', C' \in \mathcal{D}'$ distincts et posons :

$$a = (BC') \cap (CB'), \qquad b = (AC') \cap (CA'), \qquad c = (AB') \cap (BA'), \qquad \mathcal{A} = \mathbb{P}^2 \setminus (bc).$$

1. Énoncer le théorème de Pappus portant sur a, b, c.
2. Montrer que les points a, b, c sont distincts.
3. Justifier que $\mathcal{A}$ est un plan affine. Montrer le théorème de Pappus si $O \in \mathcal{A}$.
4. Montrer le théorème de Pappus si $O \in (bc)$.
5. Soit $A = (0:1:0)$, $B = (0:1:1)$, $C = (0:1:2)$, $A' = (1:0:2)$, $B' = (1:0:1)$, $C' = (1:0:0)$. Donner l'équation de la droite par a, b, c.

Corrigé 1. Esquisse de réponses.

1. Pappus stipule que a, b, c sont alignés.
2. Supposons par l'absurde que deux parmi les trois points soient confondus, par exemple $a = b$. Alors $a \in (CA') \cap (CB') = \{C\}$, car $A' \neq B'$, donc $a = C$. Par le même argument, $b \in (AC') \cap (BC') = \{C'\}$, $b = C'$. Ainsi $C = a = b = C'$, ce qui est absurde. De même si on suppose $a = c$ ou $b = c$ on parvient à une contradiction.
3. On sait que, si $\mathcal{F}$ est une droite projective de $\mathbb{P}^2$, alors $\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{F}$ est un plan affine. Les droites $(AC') \cap \mathcal{A}$ et $(CA') \cap \mathcal{A}$ sont parallèles, car leur point d'intersection b n'appartient pas à $\mathcal{A}$. De même $(AB') \cap \mathcal{A}$ et $(BA') \cap \mathcal{A}$ sont parallèles.

   Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\overrightarrow{OC} = \lambda \overrightarrow{OA}$. Par Thalès, on a $\overrightarrow{OA'} = \lambda \overrightarrow{OC'}$. Donc l'homothétie φ de centre O et rapport λ satisfait $\varphi(A) = C$ et $\varphi(C') = A'$. De même on a une homothétie ψ de centre O qui satisfait $\psi(B) = A$ et $\psi(A') = B'$. On a $\varphi(\psi(B)) = C$. Comme φ et ψ sont homothéties de même centre, elles commutent, donc $\varphi(\psi(C')) = B'$. Ainsi, par la réciproque de Thalès, $(BC') \cap \mathcal{A}$ et $(CB') \cap \mathcal{A}$ sont parallèles, donc a appartient à la droite à l'infini, à savoir (bc). Ainsi, a, b, c sont alignés.

4. De nouveau $(AC') \cap \mathcal{A}$ et $(CA') \cap \mathcal{A}$ sont parallèles, de même que $(AB') \cap \mathcal{A}$ et $(BA') \cap \mathcal{A}$; cette fois $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont aussi parallèles. Par le lemme du parallélogramme, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{C'A'}$. La translation φ de vecteur $\overrightarrow{AC}$ satisfait donc $\varphi(A) = C$ et $\varphi(C') = A'$. De même la translation ψ de vecteur $\overrightarrow{BC}$ satisfait $\psi(B) = A$ et $\psi(A') = B'$. On a $\varphi(\psi(B)) = C$ et, comme φ et ψ commutent (en tant que translations) on a $\varphi(\psi(C')) = B'$. Ainsi, $(BC') \cap \mathcal{A}$ et $(CB') \cap \mathcal{A}$ sont parallèles, donc $a \in (bc)$ et a, b, c sont alignés.
5. On calcule à titre d'équation de la droite par (BC'). Cette droite passe par les points $B = (0 : 1 : 1)$ et $C' = (1 : 0 : 0)$ donc elle s'écrit :

$$(BC') = \mathbb{V}\left(\det\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \mathbb{V}(x_1 - x_2).$$

On a calcule ainsi $\mathcal{D} = \mathbb{V}(x_0)$ et $\mathcal{D}' = \mathbb{V}(x_1)$ puis on écrit :

$$\begin{aligned} &(BC') = \mathbb{V}(x_1 - x_2), && (CB') = \mathbb{V}(-x_0 - 2x_1 + x_2), \\ &(AC') = \mathbb{V}(x_2), && (CA') = \mathbb{V}(-2x_0 - 2x_1 + x_2), \\ &(AB') = \mathbb{V}(x_0 - x_2), && (BA') = \mathbb{V}(-2x_0 - x_1 + x_2). \end{aligned}$$

Donc :

$$a = (1 : -1 : -1), \qquad b = (1 : -1 : 0), \qquad c = (1 : -1 : 1).$$

Ainsi la droite qui contient a, b, c est $\mathbb{V}(x_1 + x_2)$.

Exercice 2. Soit $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ une forme quadratique non dégénérée et $\mathcal{Q} = \mathbb{V}(q) \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ la quadrique lisse associée.

1. Soit $\mathcal{Q}$ non vide. Justifier que $\mathcal{Q}$ est projectivement équivalente à $\mathcal{Q}_1$ ou $\mathcal{Q}_2$ avec :

$$\mathcal{Q}_1 = \mathbb{V}(x_0x_3 - x_1x_2), \qquad \mathcal{Q}_2 = \mathbb{V}(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2).$$

2. Montrer que l'on a une application bien définie $\varphi : \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \to \mathcal{Q}_1$ donnée par :

$$\varphi : ((s_0 : s_1), (t_0 : t_1)) \mapsto (s_0t_0 : s_0t_1 : s_1t_0 : s_1t_1).$$

3. Montrer que φ est bijective.
4. Justifier que φ est un homéomorphisme.
5. Justifier que $\mathcal{Q}_2$ est homéomorphe à une sphère de $\mathbb{R}^3$.

Corrigé 2. On utilise que deux formes quadratiques définissent deux quadriques projectivement équivalentes ssi elles ont même signature, à un signe près.

1. Il a 5 signatures possibles pour une forme quadratique non dégénérée q sur $\mathbb{R}^4$. Au signe près, ces signatures sont $(0,4)$, $(1,3)$ et $(2,2)$. Mais une forme quadratique de signature $(0,4)$ définit une quadrique vide, donc il ne reste que deux signatures possibles, au signe près. Or les deux formes définissant $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Q}_2$ ont bien signature $(2,2)$ et $(1,3)$. En effet, pour $\mathcal{Q}_2$ l'affirmation est évidente, tandis que pour $\mathcal{Q}_1$ il suffit d'écrire $4(x_0x_3 + x_1x_2) = (x_0 + x_3)^2 - (x_0 - x_3)^2 + (x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2$. Ceci achève la preuve.
2. D'abord, l'expression de φ est bien posée car pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$ on a :
$$(\lambda s_0 \cdot \mu t_0 : \lambda s_0 \cdot \mu t_1 : \lambda s_1 \cdot \mu t_0 : \lambda s_1 \mu \cdot t_1) = (s_0t_0 : s_0t_1 : s_1t_0 : s_1t_1).$$
Aussi, il est clair qu'un point $(x_0 : \ldots : x_3) = (s_0t_0 : s_0t_1 : s_1t_0 : s_1t_1)$ dans l'image de φ appartient à $\mathcal{Q}_1$ puisque ce point satisfait $x_0x_3 - x_1x_2 = s_0s_1t_0t_1 - s_0s_1t_0t_1 = 0$.
3. Montrons que φ est surjective. On commence par considérer $(x_0 : \ldots : x_3) \in \mathcal{Q}_1$ tel que $x_i = 0$ pour un certain $i \in [\![0,3]\!]$. Soit $i = 0$. On a donc $x_1x_2 = 0$ de sorte que $x_1 = 0$ ou $x_2 = 0$. Si $x_1 = 0$, alors on voit que $(0 : 0 : x_2 : x_3) = \varphi((0 : 1), (x_2 : x_3))$. Si $x_2 = 0$, on a $(0 : x_1 : 0 : x_3) = \varphi((x_1 : x_3), (0 : 1))$. On traite de manière similaire les autres cas $i = 1, \ldots, i = 3$ et on conclut que φ est surjective sur $\mathcal{Q} \cap H_i$ pour $i \in [\![0,3]\!]$ où $H_i = \mathbb{V}(x_i)$. On voit aussi l'unicité des antécédents trouvés des points $(x_0 : \ldots : x_3) \in \mathcal{Q}_1$ tels que $x_i = 0$ pour au moins une valeur de $i \in [\![0,3]\!]$.

   On suppose désormais que $x_i \neq 0$ pour tout $i \in [\![0,3]\!]$. On cherche $(s_0 : s_1)$ et $(t_0 : t_1)$ points de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ tels que :
$$\begin{cases} s_0t_0 = x_0, \\ s_0t_1 = x_1, \\ s_1t_0 = x_2, \\ s_1t_1 = x_3. \end{cases}$$
On doit avoir $s_i \neq 0 \neq t_i$ pour $i = 0,1$ et $t_0 = x_0/s_0$, $t_1 = x_1/s_0$ et $s_1 = x_2/t_0 = (x_2/x_0)s_0$. De cette manière on détermine s_1, t_0, t_1 à partir de $(x_0, \ldots, x_3)$ et s_0. La dernière égalité $s_1t_1 = x_3$ est valide car :
$$s_1t_1 = \frac{x_1x_2}{s_0t_0} = \frac{x_1x_2}{x_0} = x_3.$$
Ainsi, $((s_0 : s_1), (t_0 : t_1))$ est un antécédent de $(x_0 : \ldots : x_3)$.

   L'unicité de ces antécédents est aussi claire. En effet, nous avons remarqué que s_1, t_0, t_1 sont déterminés à partir de $s_0 \neq 0$ et des valeurs $x_0, \ldots, x_3$. Par ailleurs, si on choisit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et on considère $x'_i = \lambda x_i$ pour $i \in [\![0,3]\!]$ alors, $s_0 \in \mathbb{R}^*$ et $t_0 \in \mathbb{R}^*$ étant choisis, on a $s_1 = (x'_2/x'_0)s_0 = (x_2/x_0)s_0$ et $t_1 = x'_1/s_0 = (x'_1/x'_0)t_0 = (x_1/x_0)t_0$. Donc $(s_0 : s_1)$ et $(t_0 : t_1)$ sont déterminés uniquement à partir de $(x_0 : \ldots : x_3)$.
4. On montre que φ est continue. On considère $\Phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ définie par $\Phi(s_0, s_1, t_0, t_1) = (s_0t_0, s_0t_1, s_1t_0, s_1t_1)$, continue en tant que fonction polynomiale en chaque coordonnée. La projection canonique $\pi : \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ fournit une application continue comme composition d'applications continues :
$$\pi \circ \Phi : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}.$$

Soit τ le produit des deux projections canoniques $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ qui associent $(s_0 : s_1)$ à (s_0, s_1) et $(t_0 : t_1)$ à (t_0, t_1). On a $\varphi \circ \tau = \pi \circ \Phi$ continue donc, comme $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ est muni de la topologie quotient associée à τ, l'application φ est continue.

Maintenant φ est continue et bijective sur son image $\mathcal{Q}_1$. De plus,, $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ est compact en tant que produit de compacts. Conclusion : φ est un homéomorphisme en tant que bijection de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ sur $\mathcal{Q}_1$, l'espace source étant compact et l'espace but étant séparé (en tant que partie de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$, qui est séparé).

5. Pour justifier que $\mathcal{Q}_2$ est homéomorphe à une sphère de $\mathbb{R}^3$, il suffit de considérer l'ouvert affine $\mathcal{U}_0 = \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}} \smallsetminus \mathbb{V}(x_0)$ de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ constitué des points de la forme $(1 : x_1 : x_2 : x_3)$. Alors $\mathcal{Q}_2 \cap \mathcal{U}_0 = \mathcal{Q}_2$ car $(x_0 : \ldots : x_3) \in \mathcal{Q}_2 \cap \mathbb{V}(x_0)$ implique $x_0 = 0$ et $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, donc $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 0$, ce qui donne l'ensemble vide dans $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$. Par ailleurs, $\mathcal{U}_0$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^3$ via l'application qui envoie (x_1, x_2, x_3) sur $(1 : x_1 : x_2 : x_3)$ et l'image réciproque de $\mathcal{Q}_2 \cap \mathcal{U}_0$ est consituée des points (x_1, x_2, x_3) de $\mathbb{R}^3$ tels que $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, ce qui est une sphère de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3. Soit $\mathbb{K}$ un corps et $A_1, \dots, A_5$ points distincts de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$.

1. Montrer l'identité suivante :
$$[A_1, A_2, A_3, A_4][A_1, A_2, A_4, A_5][A_1, A_2, A_5, A_3] = 1.$$
2. Décrire l'unique homographie σ de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ telle que $\sigma(\infty) = 0$, $\sigma(0) = \infty$, $\sigma(1) = 1$ puis en déduire $[A_2, A_1, A_3, A_4] = [A_1, A_2, A_3, A_4]^{-1}$.
3. Soit G l'ensemble des homographies de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ préservant $S = \{\infty, 0, 1\} \subset \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$. Montrer que G est un sous groupe de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$ puis en calculer l'ordre.
4. Exprimer chaque élément de G sous la forme $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{K}$.
5. En déduire l'expression de $[A_{\sigma(1)}, A_{\sigma(2)}, A_{\sigma(3)}, A_4]$ en fonction de $[A_1, A_2, A_3, A_4]$, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_3$.

Corrigé 3. On utilisera la formule, pour $A, B, C, D \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} = \mathbb{K} \cup \{\infty\}$ distincts :
$$[A, B, C, D] = \frac{D - B}{D - A}\frac{C - A}{C - B}.$$

1. On calcule $[A_1, A_2, A_3, A_4][A_1, A_2, A_4, A_5][A_1, A_2, A_5, A_3]$ et on obtient :
$$\frac{A_4 - A_2}{A_4 - A_1}\frac{A_3 - A_1}{A_3 - A_2}\frac{A_5 - A_2}{A_5 - A_1}\frac{A_4 - A_1}{A_4 - A_2}\frac{A_3 - A_2}{A_3 - A_1}\frac{A_5 - A_1}{A_5 - A_2} = 1.$$
2. Soit $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ tels que $\sigma(z) = (az + b)/(cz + d)$, donc $\sigma(0) = \infty$ implique $d = 0$. Aussi, $\sigma(\infty) = 0$ implique $a = 0$. Donc $\sigma(z) = b/(cz)$. Comme $\sigma(1) = 1$ on a $b/c = 1$ et $\sigma(z) = 1/z$.

   On sait que, si φ est l'unique homographie qui envoie A_1 sur ∞, A_2 sur 0 et A_3 sur 1, alors $\varphi(A_4) = [A_1, A_2, A_3, A_4]$, posons $z \in \mathbb{K}^*$ pour ce birapport. Ainsi, $\sigma \circ \varphi$ envoie A_1 sur 0, A_2 sur ∞, A_3 sur 1, donc $\sigma \circ \varphi$ envoie A_4 sur $[A_2, A_1, A_3, A_4]$. Par ailleurs, si $\lambda = \varphi(A_4) = [A_1, A_2, A_3, A_4]$ alors $\sigma \circ \varphi(A_4) = 1/\lambda$, donc $[A_2, A_1, A_3, A_4] = 1/[A_1, A_2, A_3, A_4]$.
3. Il est clair que l'identité préserve S et que la composition d'homographies fixant S fixe S. Aussi, si φ fixe S alors $\varphi^{-1}(S) = \varphi^{-1}(\varphi(S)) = S$, donc G est un sous groupe de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$. Un élément $\varphi \in G$ induit une permutation ρ_φ de S, et l'application $\varphi \mapsto \rho_\varphi$ est un morphisme de groupes. On sait que la seule homographie fixant un repère projectif est l'identité, donc $\rho_\varphi = \mathrm{id}_S$ implique $\varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}}$. Par conséquent $G \simeq \mathrm{Im}(\rho)$ est un sous groupe de $\mathfrak{S}_S \simeq \mathfrak{S}_3$.

   Ce sous groupe est $\mathfrak{S}_S$ tout entier. Pour le voir, étant donnés $a, b, c \in S$, notons (a, b) la transposition qui envoie a sur b et (a, b, c) le 3-cycle qui envoie a sur b et b sur c. La transposition $\tau = (0, \infty)$ satisfait $\tau = \rho_\sigma$ tandis que, si $\tau = (0, 1)$ alors $\tau = \rho_\varphi$ avec $\varphi(z) = 1 - z$. Comme ces deux transpositions engendrent $\mathfrak{S}_S$, on a ρ surjective.
4. Les éléments de G que nous n'avons pas déjà écrits sont $(1, \infty) = \rho_\varphi$ avec $\varphi(z) = z/(1 - z)$, puis $(0, \infty, 1) = \rho_\varphi$ avec $\varphi(z) = (1 - z)/z$ et enfin $(0, 1, \infty) = \rho_\varphi$ avec $\varphi(z) = 1/(1 - z)$.

5. On peut écrire tous les éléments de $\mathfrak{S}_3$ et déduire la valeur di birapport demandé en utilisant la question précédente :

$$\begin{aligned}
& & [A_1, A_2, A_3, A_4] &= \lambda, \\
\sigma &= (12), & [A_2, A_1, A_3, A_4] &= \frac{1}{\lambda}, \\
\sigma &= (13), & [A_3, A_2, A_1, A_4] &= 1 - \lambda, \\
\sigma &= (23), & [A_1, A_3, A_2, A_4] &= \frac{\lambda}{1-\lambda}, \\
\sigma &= (123), & [A_2, A_3, A_1, A_4] &= \frac{1-\lambda}{\lambda}, \\
\sigma &= (132), & [A_3, A_1, A_2, A_4] &= \frac{1}{1-\lambda}.
\end{aligned}$$

Exercice 4. La lettre $\mathbb{K}$ désignera le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$. Considérons les matrices $N, M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{K})$:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notons φ et ψ les homographies de $\mathbb{P}^2$ définies par N et M. Rappelons qu'une droite $\mathcal{D} \subset \mathbb{P}^2$ est une droite fixe de φ si $\varphi(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$.

1. Montrer que φ possède un seul point fixe si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ puis le déterminer.
2. Dénombrer les points et les droites fixes de φ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
3. Dire pour quels entiers k les points fixes de φ^k sont les mêmes que ceux de φ.
4. Montrer que ψ possède deux points fixes et deux droites fixes puis les déterminer.
5. Dire pour quels entiers k l'homographie ψ^k possède une droite de points fixes.

Corrigé 4. Notons $P_A(X) = \det(A - X\mathbb{I}_n)$ le polynôme caractéristique d'une matrice carrée A de taille n.

1. On a $P_N(X) = -X^3 + 8$. La seule valeur propre réelle de N est 2 tandis que ces valeurs propres complexes sont $2, 2\zeta$ et $2\bar{\zeta}$, où $\zeta = 2^{2\pi i/3}$. Ainsi, N est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, les sous espaces propres de N étant de dimension 1, tandis que N possède un seul espace propre réel de dimension 1. Ainsi φ possède un seul point fixe, à savoir la droite correspondant à l'espace propre de la valeur propre 2, ce qui après calcul donne le point $(1 : -2 : 0)$.
2. En vue de l'analyse dans la question précédente, φ possède 3 points fixes, un pour chaque espace propre de dimension 1 de N. De même N^t possède 3 espaces propres de dimension 1 donc φ possède 3 points fixes. Il s'agit en fait des 3 droites joignant chacune une paire de points fixes distincts.

3. Les valeurs propres complexes de N^k sont :
$$\{2^k, 2^k\zeta^k, 2^k\bar{\zeta}^k\}.$$
Si $k \equiv 1$ ou $k \equiv 2$ modulo 3, alors les valeurs propres de N^k sont distinctes et les espaces propres de N^k sont les même que ceux de N. Si $k \equiv 0$ modulo 3, on calcule $N^3 = 8\mathbb{I}_3$ donc φ^k est l'identité.

4. On voit que 2 est valeur propre de M, d'espace propre $E_2 = \mathrm{vect}(v_1)$, où $v_1 = (0,1,1)$. On calcule ensuite $P_M(X) = -(X-2)^2(X+2)$. Les espaces propres de M sont E_2 et $E_{-2} = \mathrm{vect}(v_2)$ où $v_2 = (0,1,-1)$. Soit $F = \mathrm{vect}(v_3)$ où $v_3 = (-1/2,1,1)$. Alors $(M-2\mathbb{I}_3)v_3 = v_1$, donc pour $B = (v_1,v_3,v_2)$, si f est l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ associé à M en la base canoniquie, on trouve :
$$\mathrm{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$
On a donc les points fixes $[v_1] = (0:1:1)$ et $[v_2] = (0:1:-1)$ pour ψ. Les droites fixes se trouvent en prenant la matrice transposée, et sont $\mathbb{V}(x_0)$ correspondant à $\ker(M^t - 2\mathbb{I}_3) = \mathrm{vect}((1,0,0))$ et $\mathbb{V}(x_1 - x_2)$ correspondant à $\ker(M^t + 2\mathbb{I}_3) = \mathrm{vect}((0,1,-1))$.

5. En la base B on a :
$$\mathrm{Mat}_B(f^k) = \begin{pmatrix} 2^k & k2^{k-1} & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^k \end{pmatrix}.$$
Donc une droite de points fixes apparaît ssi k est pair, et dans ce cas il s'agit de la droite $\mathbb{V}(x_1)$.

Exercice 5. Soit $\mathbb{K}$ un corps et $E = \mathbb{K}^3$. Si $r \in \mathbb{N}^*$, $p \neq 2$ est un nombre premier et $q = p^r$, nous écrivons $\mathbb{F}_q$ pour un corps à q éléments. Considérons $q_1, q_2, q_3 : E \to \mathbb{K}$ définies par :
$$\begin{aligned} q_1(x_1,x_2,x_3) &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, \\ q_2(x_1,x_2,x_3) &= x_1^2 + 5x_1x_2 + 3x_2x_3, \\ q_3(x_1,x_2,x_3) &= x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2. \end{aligned}$$
Dire lesquelles parmi les formes q_1, q_2, q_3 sont équivalentes si :

1. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$,
2. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$,
3. $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$,
4. $\mathbb{K} = \mathbb{F}_3$, puis $\mathbb{K} = \mathbb{F}_5$,
5. $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{p^2}$ avec p premier impair.

Corrigé 5. On utilise que, si q, q' sont formes quadratiques non dégénérées de même rang sur un corps fini $\mathbb{F}_q$, $q \simeq q'$ ssi le rapport des discriminants de q et q' est un carré de $\mathbb{F}_q$.

1. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Après avoir vérifié que q_1, q_2 et q_3 ont toutes rang 3, on peut conclure que ces formes sont équivalentes sur $\mathbb{C}^3$.
2. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Il suffit de calculer la signature. On a immédiatement que q_3 a signature $(2,1)$. Pour q_1 on écrit :
$$q_1(x_1,x_2,x_3) = f_1(x_1,x_2,x_3)^2 - f_2(x_1,x_2,x_3)^2 - f_3(x_1,x_2,x_3)^2, \qquad \text{où :}$$
$$\begin{aligned} f_1(x_1,x_2,x_3) &= \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3, \\ f_2(x_1,x_2,x_3) &= \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2, \\ f_3(x_1,x_2,x_3) &= x_3. \end{aligned}$$
Donc q_1 a signature $(1,2)$. De même on écrit :
$$q_2(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + (5/2)x_2)^2 - (25/4)(x_2 - 6/25x_3)^2 + 9/25x_3^2,$$
donc q_2 a signature $(2,1)$. On a donc $q_2 \sim q_3$ et $q_1 \nsim q_2$.
3. On a $q_1 \nsim q_2$ et $q_1 \nsim q_3$ car ces formes ne sont pas équivalentes sur $\mathbb{R}$ dont sur $\mathbb{Q}$ non plus. Pour voir si $q_2 \sim q_3$ sur $\mathbb{Q}$ on remarque que, par un changement de base à coefficients rationnels, comme $25/4$ et $9/25$ sont des carrés de $\mathbb{Q}$, on peut écrire $q_2(x_1,x_2,x_3) = g_1^2 + g_2^2 - g_3^3$ où g_1, g_2, g_3 sont formes linéaires libres sur $\mathbb{Q}^3$, donc $\det(\mathrm{Mat}_B(q_2)) = -1$ dans une base appropriée B de $\mathbb{Q}^3$. Ensuite, on a $\det(\mathrm{Mat}_B(q_3)) = -2\det(P)^2$, où P est la matrice de passage de la base canonique C à B, car $\det_C(q_3) = -2$. Ainsi on a $\det(P)^2 = 2$, ce qui est impossible si $\det(P) \in \mathbb{Q}$. Donc q_2 et q_3 se sont pas équivalentes sur $\mathbb{Q}$.
4. Écrivons $\delta(q) = \det(\mathrm{Mat}_C(q))$, pour une forme quadratique q. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{F}_3$. On a $\delta(q_1) = 1$, $\delta(q_2) = 0$, $\delta(q_3) = 1$. Ainsi, $q_1 \nsim q_2 \nsim q_3$ car q_2 est la seule forme dégénérée. Par contre, $q_1 \sim q_3$ car ces deux formes ont même discriminant.

   Pour $\mathbb{K} = \mathbb{F}_5$, on a $\delta(q_1) = -1$, $\delta(q_2) = -1$, $\delta(q_3) = -2$. Comme -1 et -2 ne s'obtiennet pas l'un de l'autre en multipliant par carré de $\mathbb{F}_5^*$ (donc par 1 ou -1), on a $q_2 \nsim q_3$. Par contre $q_1 \sim q_2$.
5. En calculant le discriminant sur $\mathbb{Z}$ on voit que les trois formes sont non dégénérées sur $\mathbb{F}_q$ dès lors que $p \neq 3$. Soit $d_i = \delta(q_i)$ pour $i = 1,2,3$. Supposons $p > 3$, de sorte que $d_i \neq 0$ pour $i = 1,2,3$. Alors $q_i \sim q_j$ ssi d_i/d_j est un carré de $\mathbb{F}_{p^2}$, ssi $X^2 - d_i/d_j$ admet une racine dans $\mathbb{F}_{p^2}$. Mais, comme q_i/q_j appartient à $\mathbb{F}_p$, le polynôme $X^2 - d_i/d_j$ admet une racine dans $\mathbb{F}_{p^2}$, du moment que $\mathbb{F}_{p^2}$ est isomorphe à un quelconque corps de rupture d'un polynôme irréductible de degré 2 sur $\mathbb{F}_p$. Donc les trois formes sont équivalentes sur $\mathbb{F}_{p^2}$. Pour $p = 3$ le même argument dit que $q_1 \sim q_3$ puis bien sûr $q_1 \nsim q_2 \nsim q_3$.