

Géométrie – Master 1 PMG

Temps disponible : 3 heures

Toutes les réponses doivent être justifiées. Il est possible d'admettre la réponse à une question afin de répondre aux questions suivantes.

Exercice 1 (Question de cours). Soit E un espace vectoriel de dimension $n < \infty$ sur un corps \mathbb{K} de caractéristique différente de 2. Soit q une forme quadratique sur E .

- Définir ce qu'on entend par ce que q' soit une forme équivalente à q (noté $q \simeq q'$).
- Justifier que, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, q et q' ont sont équivalentes ssi q et q' ont même signature.
- Justifier que, lorsque \mathbb{K} est algébriquement clos, $q \simeq q'$ ssi q et q' ont même rang.

Soit \mathbb{K} un corps fini et q non dégénérée. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $X^2 - \alpha$ est irréductible sur \mathbb{K} .

- Justifier qu'un tel α existe.
- Montrer qu'il existe B base de E telle que $\text{Mat}_B(q)$ vaut $\mathbb{1}_n$ ou $\text{diag}(\mathbb{1}_{n-1}, \alpha)$.
- Soit B une base de E et posons $\delta = \det(\text{Mat}_B(q))$, $\delta' = \det(\text{Mat}_B(q'))$. Dédurre que $q \simeq q'$ ssi $X^2 - \delta\delta'$ est réductible dans \mathbb{K} .
- Soit $E = \mathbb{K}^2$. Dire si $q(x_1, x_2) = -2x_1x_2$ et $q'(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ sont équivalentes pour $\mathbb{K} = \mathbb{F}_5$, $\mathbb{K} = \mathbb{F}_7$, $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{25}$.

Corrigé 1. On fournit des réponses rapides pour les questions de cours, hormis pour quelques points omits dans toutes les copies.

- Cela veut dire qu'il existe f automorphisme linéaire de E tel que $q' = q \circ f$. C'est équivalent à ce qu'il existe B et B' bases de E telles que $\text{Mat}_B(q) = \text{Mat}_{B'}(q')$. En effet, étant donné f et une base $B' = (e'_1, \dots, e'_n)$ de E , on définit $B = f(B')$ donc $B = (e_1, \dots, e_n)$ avec $e_i = f(e'_i)$. On trouve, pour tout $i = 1, \dots, n$:

$$q(e_i) = q(f(e'_i)) = q \circ f(e'_i) = q'(e'_i),$$

donc $\text{Mat}_B(q) = \text{Mat}_{B'}(q')$. Réciproquement, si nous avons $B = (e_1, \dots, e_n)$ et $B' = (e'_1, \dots, e'_n)$ alors on considère l'automorphisme f de E défini par $f(e'_i) = e_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Du fait que $\text{Mat}_B(q) = \text{Mat}_{B'}(q')$ on déduit donc $q' = q \circ f$.

- En cas de signature identique (p, m) , d'après le théorème de Sylvester on trouve deux bases B et B' de E telle que $\text{Mat}_B(q) = \text{diag}(\mathbb{I}_p, -\mathbb{I}_m, \mathbb{O}_{n-m-p}) = \text{Mat}_{B'}(q')$, donc $q \simeq q'$ d'après la question précédente. Si $q \simeq q'$ alors q et q' ont même signature, car la signature d'une forme quadratique réelle peut se lire sur sa matrice en n'importe quelle base.

- c) Deux formes équivalentes ont même rang car le rang se lit sur la matrice. En cas de rang identique, comme le corps est algébriquement clos on peut extraire la racine de $q(u)$ quelque soit $u \in E$, ce qui permet de trouver deux bases B et B' de E telle que $\text{Mat}_B(q) = \text{diag}(\mathbb{I}_r, \mathbf{0}_{n-r}) = \text{Mat}_{B'}(q')$, donc les formes q et q' sont équivalentes.
- d) Il est clair que $X^2 - \alpha$ est réductible sur \mathbb{K} ssi α appartient à $C_{\mathbb{K}}$, l'ensemble des carrés de \mathbb{K} . Or l'application $\mathbb{K}^* \rightarrow C_{\mathbb{K}}^*$ qui envoie x sur x^2 étant un morphisme de groupes de noyau $\{\pm 1\}$, le cardinal de $C_{\mathbb{K}}^*$ est $(\ell - 1)/2$, où ℓ est le cardinal de \mathbb{K} , ce qui implique que le cardinal $C_{\mathbb{K}}$ est $(\ell + 1)/2$. Il existe donc $\alpha \in \mathbb{K} \setminus C_{\mathbb{K}}$.
- e) On procède par récurrence sur n . Si $n = 1$, on prend une base (e) de E et on pose $a = q(e) \in \mathbb{K}^*$ (car q est non dégénérée). Si $a \in C_{\mathbb{K}}$ on choisit $b \in \mathbb{K}$ tel que $b^2 = a$ et on note $u = (1/b)e$ donc $q(u) = 1$. Si $a \in \mathbb{K} \setminus C_{\mathbb{K}}$ alors $(\alpha/a) \in C_{\mathbb{K}}^*$. En effet, si on regarde la projection canonique $\pi : \mathbb{K}^*/C_{\mathbb{K}}^* \simeq \{\pm 1\}$, on voit que pour tout $c \in \mathbb{K}^*$ on a $\pi(c) = 1$ ssi $c \in C_{\mathbb{K}}$, donc $\pi(\alpha) = \pi(a) = -1$ ce qui implique $\pi(\alpha/a) = 1$. On prend alors $b \in \mathbb{K}$ tel que $b^2 = (\alpha/a)$ et on pose $u = be$, de sorte que $q(u) = \alpha$, ce qui montre l'énoncé.

Si $n \geq 2$, on prend (e_1, \dots, e_n) base orthogonale de E et on regarde $q(x_1e_1 + x_2e_2) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2$ pour certains $a_1, a_2 \in \mathbb{K}^*$. On peut trouver $(x_1, x_2) \in \mathbb{K}^2$ tel que $q(x_1e_1 + x_2e_2) = 1$, car ceci revient à trouver x_2 tel que :

$$\frac{1 - a_2x_2^2}{a_1} \in C_{\mathbb{K}},$$

i.e. à trouver $y_2 \in C_{\mathbb{K}}$ tel que $(1 - a_2y_2)/a_1 \in C_{\mathbb{K}}$. Comme la fonction $\psi : y \mapsto (1 - a_2y)/a_1$ est une bijection (affine) on voit $\psi(C_{\mathbb{K}})$ a cardinal $(\ell + 1)/2$ et dont intercepte $C_{\mathbb{K}}$, lui aussi de cardinal $(\ell + 1)/2$, du moment que la somme de ces deux cardinaux est $\ell + 1$.

On considère donc $u_1 = x_1e_1 + x_2e_2$ avec $q(u_1) = 1$ et on considère $q_1 = q|_{u_1^\perp}$. Par hypothèse de récurrence, on a une base $B_1 = (u_2, \dots, u_n)$ de u_1^\perp telle que $\text{Mat}_{B_1}(q_1) = \text{diag}(\mathbb{I}_{n-1})$ ou $\text{Mat}_{B_1}(q_1) = \text{diag}(\mathbb{I}_{n-2}, \alpha)$. Ainsi, on pose $B = (u_1, B_1)$. Il s'agit d'une base de E et on trouve $\text{Mat}_B(q) = \text{diag}(\mathbb{I}_n)$ ou $\text{Mat}_B(q) = \text{diag}(\mathbb{I}_{n-1}, \alpha)$.

- f) On a $X^2 - \delta\delta'$ réductible sur \mathbb{K} ssi $\delta\delta' \in C_{\mathbb{K}}$. Si $q \simeq q'$ alors il existe deux bases B_1 et B_2 de E telles que $\text{Mat}_{B_1}(q) = \text{Mat}_{B_2}(q')$; notons M cette matrice. Soit P_1 et P_2 matrices de passage de B_1 à B et de B_2 à B . Alors on a :

$$\text{Mat}_B(q) = P_1^t M P_1, \quad \text{Mat}_B(q') = P_2^t M P_2.$$

On en obtient :

$$\delta = \det(P_1)^2 \det(M), \quad \delta' = \det(P_2)^2 \det(M).$$

Ceci implique $\delta\delta' \in C_{\mathbb{K}}$.

Réciproquement, supposons $\delta\delta' \in C_{\mathbb{K}}$. Nous savons qu'il existe deux bases B et B' de E telles que $\text{Mat}_B(q) = \text{diag}(\mathbb{I}_n)$ ou $\text{Mat}_B(q) = \text{diag}(\mathbb{I}_{n-1}, \alpha)$ et $\text{Mat}_{B'}(q') = \text{diag}(\mathbb{I}_n)$ ou $\text{Mat}_{B'}(q') = \text{diag}(\mathbb{I}_{n-1}, \alpha)$. Un changement de base de B à une autre base modifie $\det(\text{Mat}_B(q))$ par un carré, donc $\delta \in C_{\mathbb{K}}$ ssi $\text{Mat}_B(q) = \text{diag}(\mathbb{I}_n)$, et

de même pour δ' . Ainsi, $\delta\delta' \in C_{\mathbb{K}}$ implique que $\text{Mat}_B(q) = \text{diag}(\mathbb{I}_n)$ et $\text{Mat}_{B'}(q') = \text{diag}(\mathbb{I}_n)$, ou alors $\text{Mat}_B(q) = \text{diag}(\mathbb{I}_{n-1}, \alpha)$ et $\text{Mat}_{B'}(q') = \text{diag}(\mathbb{I}_{n-1}, \alpha)$. Dans les deux cas on a $q \simeq q'$.

g) On a, dans la base canonique B :

$$\text{Mat}_B(q) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{Mat}_B(q') = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

Donc $\delta = -1$ et $\delta' = 3/4$ i.e. $\delta\delta' = -3/4$. Dans \mathbb{F}_5 , on a $-3/4 = 3 \notin C_{\mathbb{F}_5}$ donc $q \not\simeq q'$. En revanche dans \mathbb{F}_7 , on a $-3/4 = 1 \in C_{\mathbb{F}_7}$ donc $q \simeq q'$. Dans \mathbb{F}_{25} , le polynôme $X^2 - 3 \in \mathbb{F}_5[X]$ a une racine car le corps de rupture de $X^2 - 3$ sur \mathbb{F}_5 possède 25 éléments (étant une extension quadratique de \mathbb{F}_5), c'est donc \mathbb{F}_{25} .

Exercice 2 (Questions rapides). Soit \mathcal{Q} conique lisse de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. Notons H_P la droite polaire de $P \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ par rapport à \mathcal{Q} .

1. Soit $Q \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ fixé. Quels sont les points $P \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ tels que H_P passe par Q ?
2. Soit $P \neq Q$ et $R = H_P \cap H_Q$. Montrer que $H_R = (PQ)$.

Soit n un entier et E l'espace vectoriel des formes quadratiques sur \mathbb{R}^n .

3. Montrer que $\dim(E) = n(n+1)/2$.
4. Montrer que l'ensemble des quadriques de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1}$ passant par un point $A \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1}$ forme un hyperplan projectif de $\mathbb{P}(E)$.
5. Montrer que, si $A_1, \dots, A_5 \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ satisfont $A_i \neq A_j$ pour $i \neq j$ et $A_k \notin (A_i A_j)$ pour $k \neq i, j$, alors il existe une et une seule conique de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ contenant A_1, \dots, A_5 .

Corrigé 2. On donne des réponses...rapides.

1. Ce sont les points de H_Q .
2. Soit X, Y, Z les coordonnées de P, Q, R et M la matrice de la forme quadratique définissant \mathcal{Q} en la base canonique. Alors ${}^t X M Z = {}^t Y M Z = 0$ donc X, Y annulent ${}^t Z M$ i.e. P, Q sont dans H_R , ainsi $H_R = (PQ)$.
3. Une forme quadratique est déterminée par le polynôme qui la représente en la base canonique et ce polynôme prend la forme $a_{1,1}x_1^2 + \dots + a_{n,n}x_n^2 + a_{1,2}x_1x_2 + \dots + a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$. Nous avons donc $n + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{2}$ coefficients et la dimension de E s'en suit.
4. L'ensemble des quadriques de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1}$ s'identifie à $\mathbb{P}(E)$ car une forme quadratique non nulle sur \mathbb{R}^n s'identifie (en utilisant l'expression en la base canonique) avec son polynôme de degré deux en (x_1, \dots, x_n) et la classe de proportionnalité tel polynôme détermine une et une seule quadrique \mathcal{Q} définie par l'annulation du polynôme. Le fait de passer par le point $(x_1 : \dots : x_n)$ impose aux coefficients $(a_{1,1}, \dots, a_{n,n})$ de vérifier l'équation $a_{1,1}x_1^2 + \dots + a_{n,n}x_n^2 + a_{1,2}x_1x_2 + \dots + a_{n-1,n}x_{n-1}x_n = 0$, ce qui est une équation linéaire non nulle en les $(a_{1,1}, \dots, a_{n,n})$. Cette équation définit donc un hyperplan de $\mathbb{P}(E)$.

5. La condition de passage par A_i définit un hyperplan de l'espace projectif $\mathbb{P}(E)$ qui a dimension 5. Ainsi, l'intersection de ces 5 hyperplans contient au moins un élément, i.e. il existe au moins une conique contenant A_1, \dots, A_5 et en fait cette conique est aussi unique si les 5 hyperplans sont indépendants.

Maintenant, supposons par l'absurde que les 5 hyperplans ne sont pas indépendants (cette partie était plus difficile). Alors au moins une des 4 équations s'écrit en fonction des autres, donc la condition de passage par l'un des points, disons celle par le point A_5 , peut être supprimée, tout en laissant inchangé l'ensemble des coniques passant par les points en question. Ceci veut dire que toute conique qui passe par A_1, \dots, A_4 passe aussi par A_5 . Ainsi, par exemple la réunion des droites (A_1A_2) et (A_3A_4) est une conique qui passe par A_1, \dots, A_4 , donc par A_5 . Conclusion : A_5 est colinéaire à (A_1A_2) ou à (A_3A_4) , c'est absurde.

Exercice 3. Soit \mathbb{K} un corps, $n > 0$ un entier et considérons $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$.

1. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ et $n = 2$. Considérons la matrice suivante :

$$N = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

- Montrer que 2 est valeur propre de N .
 - Dire quels sont les points fixes de l'homographie φ définie par N .
 - Trouver les droites fixes de φ .
 - Montrer que, pour $k > 0$, les points et droites fixes de φ^k sont ceux de φ .
- Montrer qu'une homographie de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ possède au moins un point fixe.
 - Montrer qu'une homographie de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ possède au moins un hyperplan fixe.
 - Donner la matrice d'une homographie de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ possédant un seul point fixe.
 - Donner la matrice d'une homographie de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ sans point fixe.

Corrigé 3. Nous considérons \mathbb{K}^{n+1} muni de sa base canonique et nous écrivons les éléments de \mathbb{K}^{n+1} sous la forme (x_0, \dots, x_n) ; le point de $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ déterminé par un tel vecteur (pourvu que celui-ci soit non nul) sera noté $(x_0 : \dots : x_n)$. Les matrices seront considérées comme des endomorphismes, où on sous entend qu'un endomorphisme s'écrit sous forme matricielle en la base canonique.

- On travaille sur \mathbb{Q} donc en caractéristique nulle, ainsi $0 \neq 2 \neq 4$ et $\det(N) = 16 \neq 0$ de sorte que N définit bien une homographie.
 - On calcule le polynôme caractéristique $\chi_N(X)$ de N :

$$-X^3 + 8X^2 - 20X + 16 = -(X - 4)(X - 2)^2.$$

Ainsi 2 est valeur propre de N .

- b) Bien sûr N définit une homographie car $\det(N) \neq 0$. Maintenant $(x_0 : x_1 : x_2)$ et point fixe de φ ssi (x_0, x_1, x_2) est vecteur propre de N . On calcule donc :

$$\ker(N - 2\text{id}_{\mathbb{Q}^3}) = \text{vect}((1, 1, 1)),$$

$$\ker(N - 4\text{id}_{\mathbb{Q}^3}) = \text{vect}((-1, 1, 1)).$$

On a donc deux points fixes, $(1 : 1 : 1)$ et $(-1 : 1 : 1)$.

- c) Une droite L est constituée des $(x_0 : x_1 : x_2)$ tels que $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$, pour un unique point $(a_0 : a_1 : a_2)$ de l'espace dual de $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^2$. On sait que l'image de L est la droite dont les coefficients sont donnés par le triplet ${}^tN^t(a_0, a_1, a_2)$. Ainsi pour trouver les droites fixes de φ on calcule :

$$\ker({}^tN - 2\text{id}_{\mathbb{Q}^3}) = \text{vect}((0, -1, 1)),$$

$$\ker({}^tN - 4\text{id}_{\mathbb{Q}^3}) = \text{vect}((-1, 0, 1)).$$

Ainsi nous avons deux droites fixes, donc les équations sont :

$$x_1 - x_2 = 0, \quad x_1 - x_2 = 0.$$

- d) Pour les points et droites fixes de φ^k on étudie les vecteurs propres de N^k et ${}^tN^k$. Comme le polynôme caractéristique de N est scindé sur \mathbb{Q} , la matrice N est trigonalisable sur \mathbb{Q} , plus précisément il existe $P \in \text{GL}_3(\mathbb{Q})$ telle que $T = PNP^{-1}$ est triangulaire supérieure avec $(2, 2, 4)$ sur la diagonale. Donc $T^k = PN^kP^{-1}$ est triangulaire supérieure avec $(2^k, 2^k, 4^k)$ sur la diagonale, ce qui implique que les vecteurs propres de N sont exactement ceux de N^k , quel que soit k entier positif. De même en raisonnant sur ${}^tN^k$ on conclut que les droites fixes de φ^k sont les mêmes que celles de φ .
2. Soit φ une homographie et N une matrice qui représente φ . Le polynôme caractéristique de N est scindé sur \mathbb{C} car ce corps est algébriquement clos. Ainsi ce polynôme possède au moins une racine et N possède un vecteur propre u . On a alors $[u]$ point fixe de φ .
 3. On raisonne par dualité. Fixons N matrice d'une homographie φ . L'hyperplan L constitué des $(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ tels que $a_0x_0 + \dots + a_nx_n = 0$ a pour image $\varphi(L)$, l'ensemble des $(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ tels que $b_0x_0 + \dots + b_nx_n = 0$ où ${}^t(b_0, \dots, b_n) = {}^tN^t(a_0, \dots, a_n)$. Donc $L = \varphi(L)$ ssi ${}^t(a_0, \dots, a_n)$ est vecteur propre de la matrice tN , et comme \mathbb{C} est algébriquement clos la matrice tN admet au moins un vecteur propre, ce qui termine la preuve.
 4. Il suffit de considérer une matrice N de polynôme minimal $(X - 1)^{n+1}$, par exemple la matrice N dont le coefficient (i, j) -ième vaut 0 sauf si $i = j$ ou $i = 1, j = 2$ auquel cas il vaut 1. En effet, cette matrice n'a que 1 comme valeur propre et son espace propre associé est de dimension 1.
 5. Il suffit de donner une matrice dont le polynôme caractéristique est irréductible sur \mathbb{R} , par exemple la matrice de la rotation d'un angle $\vartheta \in]0, \pi[$ exprimée en la base canonique de \mathbb{R}^2 .

Exercice 4. Soit $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2(\mathbb{R}^3)$, fixons $t \in \mathbb{R}$ et considérons la conique \mathcal{Q} d'équation :

$$2tx_1x_2 + x_2^2 + x_0x_2 + (t-1)x_0^2.$$

1. Dire quel est l'ensemble D des valeurs de t telles que la conique \mathcal{Q} est dégénérée.
2. Dire pour quelles valeurs de t la conique \mathcal{Q} est non vide.

Pour $i = 0, 1, 2$, soit $H_i \subset \mathbb{P}^2$ la droite d'équation $x_i = 0$, \mathcal{U}_i le plan $\mathbb{P}^2 \setminus H_i$ puis $\mathcal{Q}_i = \mathcal{Q} \cap \mathcal{U}_i$.

3. Dire pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R} \setminus D$ la conique \mathcal{Q}_0 est centrale. De quel centre ?
4. Pour quels $t \in \mathbb{R} \setminus D$ la conique \mathcal{Q}_1 est une ellipse, une hyperbole ou une parabole ?
5. Soit $t = 2$. Dire laquelle parmi \mathcal{Q}_0 , \mathcal{Q}_1 et \mathcal{Q}_2 est une parabole.

Corrigé 4. Soit B la base canonique de \mathbb{R}^3 . Notons q_t la forme quadratique qui définit la conique, pour $t \in \mathbb{R}$ fixé.

1. On écrit la matrice :

$$M_t = \text{Mat}_B(q_t) = \begin{pmatrix} t-1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & t \\ \frac{1}{2} & t & 1 \end{pmatrix}.$$

On trouve $\det(M_t) = -t^3 + t^2 = t^2(1-t)$. Ainsi \mathcal{Q} est dégénérée ssi $t = 0$ ou $t = 1$.

2. On sait que, si q_t est dégénérée, alors la conique est non vide. Autrement, on suppose $0 \neq t \neq 1$ et on étudie la signature de q_t par le procédé de Gauss, en obtenant :

$$q_t = \alpha_0^2 - t^2\alpha_1^2 + (t-1)\alpha_3$$

avec :

$$\alpha_0 = x_1 + \frac{1}{2}x_0 + x_2, \quad \alpha_1 = x_1 + \frac{1}{2t}x_0, \quad \alpha_2 = x_0.$$

Clairement $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ est une base de l'espace dual. Ainsi q_t est toujours indéfinie donc \mathcal{Q} est toujours non vide.