Examen de géométrie algébrique

23 mai 2016

Durée : 3 heures

Exercice 1. Soit $n \geq 2$, $\mathrm{O}(n)$ le groupe des matrices réelles orthogonales de taille n et $\mathrm{SO}(n) \subset \mathrm{O}(n)$ le sous groupe des renversements.

1. Montrer que tout élément f de $\mathrm{O}(n)$ se décompose en produit de k réflexions, avec $k \leq n$. Quelle est une meilleure borne sur k, qui dépend de la dimension de l'un des espaces propres de f ?
2. Montrer qu'un élément $A \neq I_2$ de O(2) est produit de deux réflexions si et seulement si $A \in \mathrm{SO}(2)$. Montrer que, dans ce cas, l'une des deux réflexions peut être choisie arbitrairement.
3. Montrer que tout élément de $\mathrm{SO}(n)$ se décompose en produit de k renversements, avec $k \leq n$, d'abord pour $n = 3$ puis pour $n \geq 4$.

4*. De combien de réflexions, ou de renversements, aurons-nous besoin pour décomposer la matrice suivante ?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Trouver ces réflexions et ces renversements explicitement.

Exercice 2. Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique différente de 2 et $q(x, y, z, t) = x^2 - 8xy + 21y^2 - 3zt$ forme quadratique sur $\mathbb{K}^4$.

1. Quel est le rang de q ? Est-il indépendant de la caractéristique de $\mathbb{K}$?
2. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Déterminer l'indice de q puis un setim pour q.
3. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Déterminer l'indice de q puis un setim pour q.
4. Posons $q'(x, y, z, t) = xy + z^2 + t^2$. Sur $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p$, dire si q est équivalente à q' pour $p = 11$ puis pour $p = 7$.
5. Dire pour quels $\lambda \in \mathbb{K}$ on a $q + \lambda y^2 \simeq q'$ pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Tournez la page s'il vous plaît

Exercice 3. Considérons $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (x,y,z) et notons E le plan affine des points de $\mathbb{R}^3$ ayant $z=1$. Soit $q(x,y,z)=xy-z^2$, posons $v=(1,0,1)\in E$ et définissons $f,g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ par

$$f(x,y,z)=(-x-1,-y-1,z),\qquad g(x,y,z)=(x,2x-y-1,z).$$

1. Montrer que f et g définissent des applications affines de E, en déterminer la nature et les points fixes.
2. Déterminer le sous groupe du groupe des transformations affines de E engendré par f et g.
3. Calculer l'équation du plan $F\subset\mathbb{R}^3$ engendré par v et $f(v)$ puis dire quels sont les points de F isotropes pour q.
4. Soit $G=\mathrm{vect}(v,g(v))$. Montrer qu'il existe σ isométrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à q telle que $\sigma(F)=G$.
5. Peut-on trouver σ ci-dessus satisfaisant à $\sigma(f(v))=g(v)$?

Exercice 4. Soit f le polynôme réel défini par

$$f(x,y)=3x^2+2xy+3y^2+2\sqrt{2}x-1.$$

1. Montrer que f définit une ellipse du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique, puis en calculer les rayons, les foyers, les directrices et les axes.
2. Considérons $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire

   $$\langle (x,y),(x',y')\rangle=(3xx'-xy-x'y'+3yy').$$

   Montrer que f définit un cercle C. De quel rayon ?
3. Considérons le complété projectif $\hat{C}$ dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ du cercle C et soit $H=\{x_0=0\}$ la droite l'infini de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Montrer que $H\cap\hat{C}=\{[0,1,i],[0,1,-i]\}$.
4. Montrer qu'une conique propre E de $\mathbb{R}^2$ est un cercle si et seulement si son complété $\hat{E}$ coupe H en $\{[0,1,i],[0,1,-i]\}$.

Corrigé 1. Les questions 1 à 3 sont des questions de cours.

1. C'est le théorème de Cartan-Dieudonné dans le cas euclidien, voir le cours.
2. Si $n = 2$ on a peut décomposer A en $k \leq 2$ réflexions. Si $k = 0$ réflexions, A est l'identité, ce qui n'est pas. Si $k = 1$, A est une réflexion donc pas dans SO(2). Ainsi c'est $k = 2$ ssi $A \in \mathrm{SO}(2)$. Si $A \in \mathrm{SO}(2)$ et est une réflexion B quelconque AB n'est pas dans SO(2) donc $AB = C$, réflexion. Ainsi $A = CB$.
3. Corollaire classique de Cartan-Dieudonné. Si $A \in \mathrm{SO}(3)$ alors A est le produit de $k \leq 3$ réflexions mais bien sûr $k = 3$ est impossible car $\det(A) = 1$. Ainsi $k = 0$ ou $k = 2$. Et si $k = 2$ on $A = B_1 B_2$ avec B_i réflexions on a $-B_i$ renversement donc $A = (-B_1)(-B_2)$ produit de deux renversements.

   Ensuite si $n \geq 3$, on a A produit d'un nombre pair $k = 2h \leq n$ de réflexions disons $A = B_{1,1} B_{1,2} \cdots B_{h,1} B_{h,2}$. Ainsi on aura terminé si on montre que $B_{1,i} B_{2,i}$ est produit de deux renversements. Fixons alors un $i \in \{1, h\}$ et soit $H_j = v_j^{\perp}$ l'hyperplan de réflexion de $B_{j,i}$: bien sûr $H_1 \neq H_2$ car sinon $B_{1,i} B_{2,i} = I_n$ ne doit pas apparaître dans la décomposition de A. Il existe un sous espace V de $\mathbb{R}^n$ contenant $\mathrm{vect}(v_1, v_2)$ et de dimension 3. On peut alors considérer les renversements de V d'axes $v_1^{\perp}$ et $v_2^{\perp}$ et les étendre à $\mathbb{R}^n$ par l'identité sur $V^{\perp}$: leur produit sera encore $B_{1,i} B_{2,i}$.
4. Soit A la matrice en question. On a $\det(A) = 1$ et $A \neq I_3$ donc A est le produit de deux réflexions. On sait que A et le produit de deux renversements, et pas moins car sinon $A^2 = I_3$ ce qui n'est pas le cas. Au fait on a $A^3 = I_3$, A est une matrice de permutation d'ordre 3 (on ne se servira pas de cette remarque).

   Pour trouver les décompositions, observons que $v = (1,1,1)^t$ est un vecteur propre de A donc $H = v^{\perp}$ est un espace fixe par A, A étant orthogonale. Ainsi, une quelconque réflexion d'axe $\mathrm{vect}(v, u)$, où $0 \neq u \in H$, composée avec A, donne lieu à une réflexion de H. On peut prendre $u = (1, 0, -1)^t$ auquel cas la matrice B de réflexion est :

   $$B = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

   On considère alors :

   $$B' := AB = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

   C'est la matrice de la réflexion d'axe $\mathrm{vect}(v, u')$ où $u' = (1, -1, 0)^t$. On a alors $A = B'B$ produit de deux réflexions. Comme matrices de renversement on peut choisir $-B$ et $-B'$.

On peut aussi prendre :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il s'agit de la réflexion d'axe vect(v,u), $u=(0,1,0)^t$, le vecteur normal de cet axe étant $w=(1,0,-1)^t$. On considère alors :

$$B' := AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

C'est bien sûr la réflexion d'axe vect(v',u') où $v'=(1,1,0)^t$ et $u'=(0,0,1)^t$, dont l'orthogonal est engendré par $w'=(1,-1,0)^t$.
On a alors $A=B'B$ produit de deux réflexions. Comme matrices de renversement on peut choisir $-B$ et $-B'$. Ces renversements ont axe respectivement vect(w) et vect(w') et sont parallèles respectivement à vect(u,v) et vect(u',v').

Corrigé 2. Bien sûr q est une forme quadratique sur $\mathbb{K}^4$. On utilise le procédé de Gauss.

1. On a $q(x,y,z,t)=\alpha^2+5\beta^2-\frac{3}{4}\gamma^2+\frac{3}{4}\delta^2$ où :

$$\begin{aligned} \alpha(x,y,z,t) &= x-4y, \\ \beta(x,y,z,t) &= y, \\ \gamma(x,y,z,t) &= z+t, \\ \delta(x,y,z,t) &= z-t. \end{aligned}$$

   Le rang est donc 4 si la caractéristique de $\mathbb{K}$ est différente de 5 ou 3. En caractéristique 3 on a rang 2 et en caractéristique 5 on a rang 3.
2. L'indice dans le cas réel est 1 puisque q a signature $(3,1)$. Un setim est défini par $x=y=z=0$.
3. L'indice dans le cas complexe est 2. Un setim est $\alpha-i\sqrt{5}\beta=z=0$.
4. Modulo carrés de $\mathbb{K}$, le discriminant de q est -5. Le discriminant de q' est -1 à un carré de $\mathbb{K}$ près, bien entendu q et q' sont non dégénérées. Ainsi q est équivalente à q' ssi -1 et -5 sont dans la même classe modulo $\mathbb{F}_p^2$. Or :
   — On sait que -1 est un carré dans $\mathbb{F}_p$ ssi $p\equiv 1$ modulo 4 ce qui est faux pour 7 et pour 11 ;
   — on voit que -5 est un carré dans $\mathbb{F}_7$ car $3^2=9=-5+2\times 7$ mais pas dans $\mathbb{F}_{11}$, ce que l'on vérifie facilement par un calcul direct.

   Ainsi, $q\simeq q'$ sur $\mathbb{F}_{11}$ mais pas sur $\mathbb{F}_7$.

5. Sur $\mathbb{R}$ on a $q \simeq q'$ ssi $\lambda > -5$. Sur $\mathbb{C}$ on a $q \simeq q'$ ssi $\lambda \neq -5$.

Corrigé 3. Les deux premières questions sont issues d'une fiche de TD.

1. On voit que les applications f et g laissent F fixe car elles opèrent trivialement sur z. Ces applications sont visiblement affines car restriction d'applications linéaires sur $\mathbb{R}^3$ à un plan affine. Dans $\mathbb{R}^3$, les points fixes de f sont la droite vect$((1,1,-2))$, ceux de g le plan vect$((1,1,0),(1,0,2))$. Dans F, le seul point fixe de f est $(-1/2,-1/2,1)$ tandis que g a une droite de points fixes, $\{2x-2y=1\}$.

   L'application f, sur F, est la symétrie centrale de centre $(0,0,1)$ suivie de la translation de direction $(-1,-1)$, ce qui revient à la symétrie centrale de centre $(-1/2,-1/2,1)$. Par contre, g est symétrie d'axe $\{2x-2y=1\}$ parallèle à $(0,1)$.
2. C'est le groupe des réflexions parallèles à $(0,1)$ dont l'axe est une droite de la forme $2x-2y=k$, $k\in\mathbb{Z}$, et des symétries centrales autour d'un point $(-1/2,-1/2+\ell)$, $\ell\in\mathbb{Z}$.
3. Le plan L a équation $x-3y-z=0$. Un point de L est de la forme $(\lambda-2\mu,-\mu,\lambda+\mu)$ ainsi on a $q_{|L}(\lambda,\mu)=-\lambda^2-3\lambda\mu+\mu^2$. Ceci a signature $(1,1)$ donc on a 2 points isotropes. Dans ce cas, ils correspondent aux paramètres :
$$\mu=\lambda\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}.$$
4. On trouve $g(v)=(1,1,1)$ et un point de vect$(v,g(v))$ est de la forme $(\lambda+\mu,\lambda,\lambda+\mu)$. On obtient pour la restriction de q l'expression $-\mu^2-\lambda\mu$ ce qui a signature $(1,1)$. L'application σ existe donc d'après le théorème de Witt.
5. Non, car $g(v)$ est isotrope pour q tandis que $f(v)$ ne l'est pas.

Corrigé 4. On note B la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On note E l'espace $\mathbb{R}^2$ muni de sa norme euclidienne canonique et E' l'espace $\mathbb{R}^2$ muni de la norme définie par le produit scalaire de la question 2 et $|\cdot|'$ la norme dans E'. La forme quadratique de f est $q(x,y)=3x^2+2xy+3y^2$, de matrice
$$M=\mathrm{Mat}_B(q)=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. On peut écrire $q=3(x+1/3y)^2+8/3y^2$ ce qui prouve que f définit une ellipse. On peut trouver une base orthonormée de E orthogonale pour q on remarque que $\vec{v}=(1,1)^t$ est un vecteur propre de M de valeur propre 4. Le vecteur $\vec{u}=(1,-1)^t$ étant orthogonal à $\vec{v}$ est donc aussi un vecteur propre de M, et sa valeur propre est 2. Ainsi on a des axes de direction $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

En utilisant le changement de base orthonormée :

$$X = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y,$$
$$Y = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y,$$

on obtient :

$$f(x,y) = g(X,Y) = 4X^2 + 2Y^2 + 2X + 2Y - 1$$

Donc en posant $z = X + 1/4$ et $w = Y + 1/2$ on a :

$$g(X,Y) = 4(X+1/4)^2 + 2(Y+1/2)^2 + 1/4 = 4z^2 + 2w^2 - 7/4.$$

Ainsi pour $a = \sqrt{7/16}$ et $b = \sqrt{7/8}$ l'ellipse est définie par :

$$\left(\frac{z}{a}\right)^2 + \left(\frac{w}{b}\right)^2 = 1.$$

Ainsi le centre de l'ellipse est $(-1/4, -1/2)$ en les coordonnées (X,Y) i.e. $C = (-3\sqrt{2}/8, \sqrt{2}/8)$ en (x,y). On a donc $A = C + \vec{u}$ et $B = C + \vec{v}$ comme axes, a et b comme rayons. Les foyers se trouvent sur l'axe A à distance $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ du centre C. Les directrices sont parallèles à $\vec{u}$ et se situent à distance a^2/c des foyers.

2. On a la base orthogonale suivante pour E' :

$$\tilde{e}'_1 = (1,1), \qquad \tilde{e}'_2 = (1,-1),$$

avec norme :

$$|\tilde{e}'_1|' = 2\sqrt{2}, \qquad |\tilde{e}'_2|' = 2.$$

Donc on pose :

$$e'_1 = \sqrt{2}/4\,\tilde{e}'_1 = (\sqrt{2}/4, \sqrt{2}/4), \qquad e'_2 = 1/2\,\tilde{e}'_2 = (1/2, -1/2),$$

et on trouve la base orthonormée $B' = (e'_1, e'_2)$ de E'.
La matrice de changement de base est

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/4 & 1/2 \\ \sqrt{2}/4 & -1/2 \end{pmatrix}$$

On trouve alors :

$$M' = \mathrm{Mat}_{B'}(q) = P^t M P = I_2.$$

Ceci montre que C est un cercle.
On trouve après remplacement $(x,y) = P(x',y')$ l'expression de la conique :

$$(x')^2 + (y')^2 + x' + \sqrt{2}y' - 1 = (x'+1/2)^2 + (y'+\sqrt{2}/2)^2 - 7/4.$$

C'est donc un cercle de centre $(-1/2, -\sqrt{2}/2)$ et de rayon $\sqrt{7}/2$.

3. Comme C est un cercle, il peut s'écrire $(x-p)^2+(y-q)^2=r$, où r est le rayon et (p,q) est le centre. En coupant par $x_0=0$, on obtient une conique de forme homogène x^2+y^2, i. e. deux points $[0,1,\pm i]$.
4. La réponse à la question précédente fonctionne pour tout cercle D donc $\hat{D}\cap H=\{[0,1,\pm i]\}$.

   Réciproquement, si on prend une conique projective $\hat{E}$ définie par une équation de la forme $\alpha x^2+\cdots$, son intersection avec H est $\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2=0$ et ceci s'annule en $[1,\pm i]$ ssi $\alpha=\gamma$ et $\beta=0$, ce qui correspond à ce que E soit un cercle.