Algèbre 1 27/10/2016

Justifiez vos réponses

Exercice 1. (QC) Énoncer et démontrer le critère d'irréductibilité d'Eisenstein.

Exercice 2.

1. Le polynôme
$$2X^6 - 30X^5 + 6X^3 + 12X - 6$$
est-il irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$? Dans $\mathbb{Z}[X]$?
2. Le polynôme
$$Y^4 + 3X^3Y - XY^2 + X^3 - X$$
est-il irréductible dans $\mathbb{Q}[X, Y]$?
3. Le polynôme $X^5 - 7$ est-il irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$?

Exercice 3. Soit A un anneau intègre et noethérien.

1. Montrer que tout élément de $a \in A$ s'écrit sous la forme $a = u.p_1 \dots p_r$ avec $u \in U(A)$ et $p_1, \dots, p_r \in A$ irréductibles.
2. On considère
$$\mathbb{Z}[i\sqrt{7}] = \{a + b.i\sqrt{7} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$$
Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$ est un anneau intègre.
3. Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{7}] \cong \mathbb{Z}[X]/(X^2+7)$. En déduire que $\mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$ est noethérien.
4. L'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$ est-il factoriel ?

Exercice 4. Soit (α, β, γ) les racines du polynôme $P(X) = 2X^3 + X - 1$.

1. Calculer $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ puis $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$.
2. Montrer que, si s_i est la i-ième fonction symétrique élémentaire en 3 variables, alors :
$$s_i\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}\right) = \frac{s_{3-i}(x_1, x_2, x_3)}{s_3(x_1, x_2, x_3)}.$$
3. Calculer $1/\alpha + 1/\beta + 1/\gamma$.
4. Savez-vous dire combien parmi (α, β, γ) sont réelles ?
5. Remarquer que $3X^2 - 6X + 2 = X(X-1) + X(X-2) + (X-1)(X-2)$ puis décomposer en éléments simples
$$\frac{3X^2 - 6X + 2}{X^3 - 3X^2 + 2X}.$$
6. Généraliser la formule de la question 2 à n variables.