Algèbre 1 27 octobre 2015 durée 2h

Exercice 1.

a) (QC) Démontrer le résultat suivant (critère d'Eisenstein). Soit A un anneau factoriel, et soit K son corps des fractions. Soit

$$f = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0 \in A[X].$$

S'il existe un élément premier $p \in A$ tel que

(a) $p \nmid a_n$

(b) $p \mid a_i \; i = 0, \cdots, n-1$

(c) $p^2 \nmid a_0$.

Alors f est irréductible dans $K[X]$.

b) Montrer que le polynôme $X^{p-1} + X^{p-2} + \cdots + X + 1$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ si p est un nombre premier.

c) (*) Redémontrer le critère d'Eisenstein en utilisant réduction modulo p. (Indication: On raisonne par l'absurde. Supposons que $f = f_1 f_2$ soit réductible. Par réduction modulo p on obtient $\overline{f} = \overline{f_1}.\overline{f_2}$. En déduire la forme des polynômes $\overline{f}$, $\overline{f_1}$ et $\overline{f_2}$, puis la forme de f, f_1 et f_2 pour arriver à une contradiction.)

Exercice 2.

a) Déterminer les polynômes irréductibles de degré 2 et 3 dans $\mathbb{F}_2[X]$.

b) Le polynômes suivants sont-ils irréductibles dans $\mathbb{F}_2[X]$?

b1) $f_1 = X^4 + X + 1$

b2) $f_2 = X^5 + X + 1$.

c) Soit $g = 2X^6 + 3X^5 + 8X^4 + X^2 + 7 \in \mathbb{Z}[X]$. Est-ce que g est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$?

Exercice 3. On pose

$$\begin{aligned} A &= \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \ f\text{est continue}\} \\ I_n &= \{f \in A \mid f(n) = 0 \text{ si } x \geq n\}(n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

a) Montrer que A est un anneau et $I_n \subset A$ est un idéal pour tout n.

b) (*) L'anneau A est-il intègre ?

c) (*) Montrer que A n'est pas un anneau noethérien. (Indication: utiliser la partie a.)

Exercice 1. Soit $A = \mathbb{Z}[X]$, p un premier et $B = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$

1. Justifier que B est principal.
2. Considérons l'application $\pi : A \to B$ qui envoie $\sum a_i X^i$ sur $\sum \bar{a}_i X^i$, $\bar{a}$ étant la classe de $a \in \mathbb{Z}$ modulo p. Décrire le noyau de π.
3. Factoriser le polynôme $X^p + \bar{1}$ dans B.
4. Soit $p = 5$. Factoriser $X^{10} + X^5 + \bar{1}$ dans B.
5. Quel est le générateur de l'idéal $(x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{2}x - 1, x^2 + 2x)$?