Examen Algèbre 1 janvier 2016

NB. Les étudiants en **MA1** font les exercices 1, 2, 3, 4B et 5. Les étudiants en **MEEF1** font les exerices 1, 2.1, 2.2, 3, 4A, 5.1 et 5.2.

Exercice 1. (QC) Soit K un corps et $f \in K[X]$ un polynôme non constant. Montrer qu'il existe un corps de rupture pour f.

Exercice 2.

1. Soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{18}, \sqrt[4]{2})$. Calculer $[K : \mathbb{Q}]$.
2. Soit $\alpha = i\sqrt[4]{5} - \sqrt{5}$. Déterminer le polynôme minimal de α sur $\mathbb{Q}$.

3.* Soit $\mathbb{R} \subset L$ une extension de degré fini. Montrer que $L \cong \mathbb{R}$ ou $L \cong \mathbb{C}$.

Exercice 3. Soient

$$f = X^2 - XY + Y^2 - 1, \quad g = 2X^2 + Y^2 - Y - 2 \in \mathbb{Q}[X, Y].$$

1. On pose $A = \mathbb{Q}[X]$ et on considère f et g comme des éléments de $A[Y]$. Calculer le résultant $\operatorname{Res}(f, g) \in A$.
2. Les polynômes f et g ont-ils un facteur commun non constant dans l'anneau $\mathbb{Q}[X, Y]$?
3. Déterminer les valeurs $a \in \mathbb{Q}$ tel que les polynômes $f_a = f(a, Y)$ et $g_a = g(a, Y)$ ont un facteur commun non constant dans $\mathbb{Q}[Y]$.
4. En déduire les solutions (a, b) du système $f(X, Y) = g(X, Y) = 0$.

Exercice 4.

A.# Exprimer les polynômes suivants en fonction des polynômes symétriques élémentaires.

1. $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$;
2. $X_1^3 + X_2^3 + X_3^3$;
3. $X_1^2X_2 + X_1X_2^2 + X_1^2X_3 + X_1X_3^2 + X_2^2X_3 + X_2X_3^2$.

B.*

1. Exprimer $X_1^3 + X_2^3 + X_3^3$ en fonction des polynômes symétriques élémentaires.
2. Trouver la somme des cubes des racines de $X^3 + X - 3$.

Exercice 5. Soit $f = X^3 + X^2 + \overline{1} \in \mathbb{F}_2[X]$. On pose

$$K = \mathbb{F}_2[X]/(f).$$

1. Montrer que $K \cong \mathbb{F}_8$. Dans la suite on identifie K à $\mathbb{F}_8$ par cet isomorphisme.
2. Soit $\alpha = \overline{X}$. Calculer $\alpha(\alpha^2 + \alpha + 1)$, α^5 et $(1 + \alpha)^{-1}$.

3.* Montrer que l'homomorhpisme de Frobenius $\varphi : \mathbb{F}_8 \to \mathbb{F}_8$ définie par $\varphi(x) = x^2$ est un isomorphisme de corps.