Examen Algèbre 1 6/1/2015 durée 3h

Exercice 1 (QC)

(i) Rappeler la définition d'un corps de rupture.

(ii) Démontrer l'existence d'un corps de rupture pour $f \in K[X]$ un polynôme de degré positif (K un corps).

Exercice 2. Exprimer les polynômes suivants en fonction des polynômes symétriques élémentaires :

(a) $(x_1 - x_2)^2$ dans $\mathbb{Q}[x_1, x_2]$;

(b) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ dans $\mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3]$;

(c) $x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2$ dans $\mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3]$;

(d) $(x_1+x_2-x_3-x_4)(x_1+x_3-x_2-x_4)(x_1+x_4-x_2-x_3)$ dans $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_4]$;

(e) $\sum_{i,j,k \text{ distincts}} x_i^2 x_j x_k$ dans $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]$;

(f) Supposons que $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ est une solution du système d'équations

$$\left\{ \begin{array}{r} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2 \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3. \end{array} \right. \tag{1}$$

(f1) Calculer $a^4 + b^4 + c^4$.

(f2) Existe-t-il une solution $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ du système (1) ?

Exercice 3.

(i) Déterminer le polynôme minimal de $\sqrt{2} + \sqrt{7}$ sur $\mathbb{Q}$.

(ii) Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{7}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{7})$.

(iii) A-t-on $\sqrt{56} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{7}]$?

TOURNER S.V.P.

Exercice 4.

(i) Factoriser complètement le polynôme $X^8 - X$ dans $\mathbb{F}_2[X]$.

(ii) Soit α une racine de $X^3 + X + 1$. Montrer que $\mathbb{F}_2(\alpha) \cong \mathbb{F}_8$.

(iii) Montrer que α est un générateur du groupe multiplicatif $\mathbb{F}_8^*$.

(iv) Ecrire α^n sous la forme $a\alpha + b$ avec $a, b \in \mathbb{F}_2$ pour $n = 2, \ldots, 7$.