Université de Bourgogne — Année 2017-2018
U.F.R. Sciences et Techniques — 8 jan. 2018
Parcours PMG : M1-Mathématiques

Examen – ALGEBRE 1

Durée 3 heures (documents et calculatrices non autorisés)

Justifier vos réponses pour toutes les questions.

(1) Soit p un nombre premier.
(a) Montrer que $P = \sum_{k=0}^{p-1} X^k \in \mathbb{Z}[X]$ est irréductible, et donc P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. (Indication : Vous pouvez utiliser que $P = \frac{X^p-1}{X-1}$.)
(b) Soit $\omega = \exp(\frac{2\pi i}{p}) \in \mathbb{C}$. Déterminer le degré de l'extension de corps, $L_p = \mathbb{Q}(\omega)$ sur $\mathbb{Q}$.
(c) Soit G_p le groupe d'automorphismes du corps L. Donner l'ordre de ce groupe.
(d) Pour $p = 13$, montrer que le groupe G_p est cyclique. Trouver un générateur.
(e) Soit $\eta = \exp(\frac{\pi i}{4}) \in \mathbb{C}$, et soit $M = \mathbb{Q}(\eta)$. Déterminer le degré de l'extension de M sur $\mathbb{Q}$.
(f) Déterminer le groupe d'automophismes de M. (Trouver l'ordre, et donner la structure du groupe.)

(2) Soit $K = \mathbb{F}_2$ un corps à deux éléments.
(a) Déterminer tous les polynômes irréductibles de $K[X]$ de degré ≤ 3.
(b) Montrer que $X^6 + X^3 + 1 \in K[X]$ est irréductible.
(c) Soit $L = K[X]/(X^6 + X^3 + 1)$, et soit $\alpha \in L$ la classe de X modulo $X^6 + X^3 + 1$. Montrer que L est un K-espace vectoriel, et donner une base.
(d) Montrer que l'ordre de α dans le groupe $L^* = L \setminus \{0\}$ est 9.
(e) Trouver un sous-corps de L à 4 éléments.
(f) Soit $\beta = \alpha^4(\alpha + 1) \in L$. Trouver le polynôme minimal de β dans $K[X]$.
(g) Soit $M = K(\beta)$ le sous corps de L engendré par β. Déterminer le corps M.

(3) Soient $P = X^2 + 3X + 1$, et $Q = 2X^2 - X + 4$ deux polynômes de $\mathbb{Z}[X]$.
(a) Calculer le résultant $R(P, Q)$.
(b) Trouver tous les nombres premiers p tels que P et Q ont une racine commune dans le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

(4) Soit $F(X) = X^3 - 9X^2 + 11X - 1 \in \mathbb{Z}[X]$.
(a) En remarquant que $F(0) < 0$, $F(1) > 0$ et $F(2) < 0$, montrer que le polynôme a 3 racines disctinctes $r_1, r_2, r_2 \in \mathbb{R}_{>0}$.
(b) Déterminer les valeurs $\sigma_1 = r_1 + r_2 + r_3$, $\sigma_2 = r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3$, et $\sigma_3 = r_1r_2r_3$.
(c) Soit $s = \sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} + \sqrt{r_3}$, et soit $t = \sqrt{r_1r_2} + \sqrt{r_1r_3} + \sqrt{r_2r_3}$. Montrer que $t^2 = \sigma_2 + 2s\sqrt{\sigma_3}$ et $s^2 = \sigma_1 + 2t$.
(d) Déterminer $s^4 - 18s^2 - 8s$.

(5) Soit $P = X^3 - 3 \in \mathbb{Q}[X]$. Soit L un corps de décomposition de P sur $\mathbb{Q}$.
(a) Déterminer le degré de l'extension $L/\mathbb{Q}$. Donner une $\mathbb{Q}$-base de L.
*(b) Trouver un élément $\beta \in L$ tel que le polynôme minimal de β est de degré 6. (Indication : Pour un bon choix de β, écrire 1, β, β^2 et β^3 dans la base trouvée dans la question (5a), et montrer que le polynôme minimal de β est de degré > 3.)
(c) Montrer que $L = \mathbb{Q}(\beta)$.